MAGISCHE VIERKANTEN

TYPEN EN VOORBEELDEN

(door ing. P.H. Stikker)

Versie: 11-02-03

Voorwoord

Dit document is opgesteld om een overzicht te krijgen van alle type magische vierkanten. Hopelijk is de lijst nu compleet, maar mocht u toch nog enkele type magische vierkanten missen laat mij dit dan a.u.b. weten.
Het document behandeld alleen magische vierkanten en dus niet magische kubussen, pentagrammen etc.
In de toekomst wil ik nog een aanvulling maken die de betreffende methodes voor het maken van een magisch vierkant behandeld en eventueel ook kijkt naar andere magische figuren.
Mocht u na het doornemen van dit document nog suggesties en/of opmerkingen hebben, laat mij dit dan a.u.b. weten door een email te sturen aan: peter.stikker@INHOLLAND.nl.

Ik wens u veel lees plezier.

Hoogachtend,

ing. P.H. Stikker

Vertaling

De meeste informatie in dit document is uit Engelstalige bronnen afkomstig. Ik heb de volgende (zelf bedachte) vertalingen gebruikt:

Engels	Nederlands
Addition magic square	Optelling magisch vierkant
Alphamagic square	Alphamagisch vierkant
Antimagic square	Antimagisch vierkant
Associative / symmetrical magic square	Associatief / symmetrisch magisch vierkant
Bimagic square / Doubly magic square	Bimagisch vierkant
Complementary	Complementair
Concentric / bordered magic square	Concentrisch / rand magisch vierkant
Inlaid magic square	Ingelegde magisch vierkant
Magic carpet	Magisch tapijt
Magic square	Magisch vierkant (tovervierkant)
Most perfect magic square	Meest perfect magisch vierkant
Multimagic square	Multimagisch vierkant
Multiplication magic square	Vermenigvuldiging magisch vierkant
Panmagic square / Diabolic square / Pandiagonal square / Nasik square	Panmagisch vierkant / Diabolisch vierkant / Pandiagonaal vierkant / Nasik vierkant
Semimagic square	Half magisch vierkant
Trebly magic square / Trimagic square	Trimagisch vierkant
Ultra magic square	Ultra magisch vierkant

Index

Termen bij Magische vierkanten

Magische Constante
De ‘gewone’ of ‘som’ constante is het steeds gelijk in een magisch vierkant, bij de som van iedere rij, kolom en hoofddiagonaal. Deze constante kan verkregen worden met de formule:
$M_2(n) = ½n(n^2+1)$
Hierbij is n het aantal elementen.

Vermenigvuldiging Magische Constante
Dit is het getal dat steeds gelijk blijft indien bij een vermenigvuldiging magisch vierkant het product van iedere rij, kolom en hoofddiagonaal wordt genomen.

Orde
De orde van een magisch vierkant is het aantal rijen of kolommen. Bij een n x n magisch vierkant is dit dus n. Vaak wordt een onderscheidt gemaakt tussen een even en oneven orde, aangezien bij een even orde er geen ‘middelste’ element is.

Type magische vierkanten

Magisch vierkant

Definitie:
Een (normale) magisch vierkant bestaat uit verschillende positieve gehele getallen 1, 2, … , n^2 zodanig dat de som van de n getallen in elke horizontale, verticale, en hoofd diagonalen altijd dezelfde magische constante is.

$M_2(n) = ½n(n^2+1)$

Voorbeeld:

15=8+5+2	8+3+4=15	1+5+9=15	6+7+2=15	6+5+4=15
	8	1	6	-> 8+1+6=15
	3	5	7	->3+5+7=15
	4	9	2	->4+9+2=15

Vermenigvuldiging magisch vierkant

Definitie:
Anders dan bij normale magische vierkanten, hoeven de getallen nu niet opeenvolgend te zijn. Zoals de naam al doet vermoeden betreft het hier een vierkant dat magisch is onder vermenigvuldiging en dus niet optellen.

Voorbeeld:

128	1	32
4	16	64
8	256	2

Merk hier dus op dat iedere kolom, rij en hoofddiagonaal vermenigvuldigd 4096 oplevert:

Voor de rijen:	128·1·32=4096	4·16·64=4096	8·256·2=4096
Voor de kolommen:	128·4·8=4096	1·16·256=4096	32·64·2=4096
Voor de hoofddiagonaal:		128·16·2=4096	32·16·8=4096

Optelling-Vermenigvuldiging magisch vierkant

Definitie:
Een vierkant dat zowel een magisch vierkant als een vermenigvuldiging magisch vierkant is.

Voorbeeld:

46	81	117	102	15	76	200	203
19	60	232	175	54	69	153	78
216	161	17	52	171	90	58	75
135	114	50	87	184	189	13	68
150	261	45	38	91	136	92	27
119	104	108	23	174	225	57	30
116	25	133	120	51	26	162	207
39	34	138	243	100	29	105	152

Orde: 8
Som Magische Constante: 840
Vermenigvuldiging Magische Constante: 2.058.068.231.856.000
Opgesteld door: Horner (1955), Hunter en Madachy (1975)

Panmagisch / Diabolisch / Nasik magisch vierkant

Definitie:
Als alle diagonalen, inclusief die verkregen worden door de randen af te gaan de magische constante opleveren.

Je begint dus diagonaal op te tellen, en zodra je bovenaan komt, schuif je een rij op en begint weer onderaan.

Voorbeeld:

1	15	24	8	17
23	7	16	5	14
20	4	13	22	6
12	21	10	19	3
9	18	2	11	25

De diagonalen zijn dus:	1+7+13+19+25=65	15+16+22+3+9=65	24+5+6+12+18=65
(van links naar rechts)	8+14+20+21+18=65	17+23+4+10+11=65	
De diagonalen:	17+5+13+21+9=65	8+16+4+12+25=65	24+7+20+3+11=65
(van rechts naar links)	15+23+6+19+2=65	1+14+22+10+18=65	

Wetenswaardigheden:
- Orde 4 magische vierkanten kunnen panmagisch zijn of associatief, maar niet beide.
- Orde 5 vierkanten zijn de kleinste die wel beide kunnen zijn.
- 16 verschillende associatieve panmagische vierkanten bestaan (een ervan is het voorbeeld).
- Panmagische vierkanten zijn verwant met de hyperkubus.

Ultra magisch

Definitie:
Een magisch vierkant wordt ook wel ultra magisch genoemd, indien het:

1. Panmagisch vierkant is
2. Zelf complementair magisch is.

Voorbeeld:

5	23	16	14	7
11	9	2	25	18
22	20	13	6	4
8	1	24	17	15
19	12	10	3	21

Uitwerking:

Voor elke rij:	5+23+16+14+7=65	11+9+2+25+18=65	22+20+13+6+4=65
	8+1+24+17+15=65	19+12+10+3+21=65	
Voor elke kolom:	5+11+22+8+19=65	23+9+20+1+12=65	16+2+13+24+10=65
	14+25+6+17+3=65	7+18+4+15+21=65	
Voor elke diagonaal:	5+9+13+17+21=65	23+2+6+15+19=65	16+25+4+8+12=65
(links naar rechts)	14+18+22+1+10=65	7+11+20+24+3=65	
Voor elke diagonaal:	7+25+13+1+19=65	14+2+20+8+21=65	16+9+22+15+3=65
(rechts naar links)	23+11+4+17+10=65	5+18+6+24+12=65	

Conclusie: Dit magisch vierkant is panmagisch.

Nu het complement:

21	3	10	12	19
15	17	24	1	8
4	6	13	20	22
18	25	2	9	11
7	14	16	23	5

Dit is een geroteerde variant van het origineel

Conclusie: Dit magisch vierkant is zelf complementair

Eind conclusie: Omdat dit magisch vierkant Panmagisch en zelf complementair magisch is, is het tevens Ultra magisch.

Meest perfect magisch vierkant

Als het de opeenvolgende getallen 1, 2, …, n^2 bevat zodanig dat:

1. Elke vier aanliggende gehele getallen die een 2x2 subvierkant vormen een som hebben van: $S = 2T = 2(n^2+1)$
2. Elk paar van gehele getallen met een afstand van n/2 langs de diagonaal, een som hebben van: $T = n^2+1$
3. Het een dubbel-even orde heeft, bijvoorbeeld van de orde n = 4k.

Voorbeeld:

1	15	10	8
12	6	3	13
7	9	16	2
14	4	5	11

Uitwerking:

Som van de subvierkanten: $S = 2\cdot(4^2+1) = 34$

1+15+12+6=34 15+10+6+3=34 10+8+3+13=34
12+6+7+9=34 6+3+9+16=34 3+13+16+2=34
7+9+14+4=34 9+16+4+5=34 16+2+5+11=34

Conclusie: Aan voorwaarde 1 is voldaan.

Som langs diagonaal: $T = 4^2+1 = 17$

1+16=17 15+2=17 10+7=17 8+9=17
12+5=17 6+11=17 3+14=17 13+4=17

Conclusie: Aan voorwaarde 2 is voldaan.

Dubbel even orde:

De orde is 4 en 4 = 2 x 2 dus dubbel even, of n = 4·1 = 4.

Conclusie: Aan voorwaarde 3 is voldaan.

Eindconclusie: Aan alle drie de voorwaarden is voldaan: Dit magisch vierkant is een meest perfect magisch vierkant.

Dürer's magisch vierkant

Definitie:

Een magisch vierkant met 15 en 14 naast elkaar op de laatste rij en in de middelste kolommen.

Voorbeeld:

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Complementair magisch vierkant

Definitie:
Als ieder getal in een magisch vierkant wordt afgetrokken van n^2+1 er een magisch vierkant over blijft.

Voorbeeld:

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

In dit geval is ieder getal in het linker vierkant afgetrokken van $4^2 + 1 = 17$, dus bv. 16 wordt in de rechter $17 – 16 = 1$

Zelf complementair magisch vierkant

Definitie:
Indien een complementair magisch vierkant een geroteerde of gereflecteerde versie is van de oorspronkelijke vierkant.

Voorbeeld:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Hier zal een horizontale en verticale reflectie hetzelfde opleveren.

Half magisch vierkant

Definitie:
Een vierkant dat niet magisch is, alleen omdat een of beide van de hoofddiagonalen sommaties niet gelijk zijn aan de magische constante

Multimagic square

Een magisch vierkant heet p-multimagisch als het vierkant dat gevormd wordt door ieder element te vervangen door de k-de macht voor k = 1, 2, …, p ook magisch is.

Wetenswaardigheden:

- Bimagische vierkanten en trimagische vierkanten zijn dus speciale multimagische vierkanten

Bimagisch vierkant

Definitie:
Een magisch vierkant dat wanneer ieder getal gekwadrateerd wordt, opnieuw een magisch vierkant geeft:

Voorbeeld:

16	41	36	5	27	62	55	18
26	63	54	19	13	44	33	8
1	40	45	12	22	51	58	31
23	50	59	30	4	37	48	9
38	3	10	47	49	24	29	60
52	21	32	57	39	2	11	46
43	14	7	34	64	25	20	53
61	28	17	56	42	15	6	35

Orde: 8
Som Magische Constante: 260

Zal als ieder getal gekwadrateerd wordt geven:

256	1681	1296	25	729	3844	3025	324
676	3969	2916	361	169	1936	1089	64
1	1600	2025	144	484	2601	3364	961
529	2500	3481	900	16	1369	2304	81
1444	9	100	2209	2401	576	841	3600
2704	441	1024	3249	1521	4	121	2116
1849	196	49	1156	4096	625	400	2809
3721	784	289	3136	1764	225	36	1225

Orde: 8
Som Magische Constante: 11180

Wetenswaardigheden:

- Er wordt geloofd dat er geen bimagisch vierkanten bestaan van een kleinere orde dan 8.
- Hendricks (1998) heeft bewezen dat het voor de orde van 3 zelfs onmogelijk is, met natuurlijk de uitzondering van het triviale geval van steeds hetzelfde nummer gebruiken.

Trimagisch vierkant

Definitie:
Een vierkant dat wanneer ieder getal vervangen wordt door zijn kwadraat of derdemacht opnieuw een magisch vierkant oplevert.

Voorbeeld:

1	22	33	41	62	66	79	83	104	112	123	144
9	119	45	115	107	93	52	38	30	100	26	136
75	141	35	48	57	14	131	88	97	110	4	70
74	8	106	49	12	43	102	133	96	39	137	71
140	101	124	42	60	37	108	85	103	21	44	5
122	76	142	86	67	126	19	78	59	3	69	23
55	27	95	135	130	89	56	15	10	50	118	90
132	117	68	91	11	99	46	134	54	77	28	13
73	64	2	121	109	32	113	36	24	143	81	72
58	98	84	116	138	16	129	7	29	61	47	87
80	34	105	6	92	127	18	53	139	40	111	65
51	63	31	20	25	128	17	120	125	114	82	94

Nu deze kwadrateren zal geven:

1	484	1089	1681	3844	4356	6241	6889	10816	12544	15129	20736
81	14161	2025	13225	11449	8649	2704	1444	900	10000	676	18496
5625	19881	1225	2304	3249	196	17161	7744	9409	12100	16	4900
5476	64	11236	2401	144	1849	10404	17689	9216	1521	18769	5041
19600	10201	15376	1764	3600	1369	11664	7225	10609	441	1936	25
14884	5776	20164	7396	4489	15876	361	6084	3481	9	4761	529
3025	729	9025	18225	16900	7921	3136	225	100	2500	13924	8100
17424	13689	4624	8281	121	9801	2116	17956	2916	5929	784	169
5329	4096	4	14641	11881	1024	12769	1296	576	20449	6561	5184
3364	9604	7056	13456	19044	256	16641	49	841	3721	2209	7569
6400	1156	11025	36	8464	16129	324	2809	19321	1600	12321	4225
2601	3969	961	400	625	16384	289	14400	15625	12996	6724	8836

En de originele tot de derde macht geeft:

1	10648	35937	68921	238328	287496	493039	571787	1124864	1404928	1860867	2985984
729	1685159	91125	1520875	1225043	804357	140608	54872	27000	1000000	17576	2515456
421875	2803221	42875	110592	185193	2744	2248091	681472	912673	1331000	64	343000
405224	512	1191016	117649	1728	79507	1061208	2352637	884736	59319	2571353	357911
2744000	1030301	1906624	74088	216000	50653	1259712	614125	1092727	9261	85184	125
1815848	438976	2863288	636056	300763	2000376	6859	474552	205379	27	328509	12167
166375	19683	857375	2460375	2197000	704969	175616	3375	1000	125000	1643032	729000
2299968	1601613	314432	753571	1331	970299	97336	2406104	157464	456533	21952	2197
389017	262144	8	1771561	1295029	32768	1442897	46656	13824	2924207	531441	373248
195112	941192	592704	1560896	2628072	4096	2146689	343	24389	226981	103823	658503
512000	39304	1157625	216	778688	2048383	5832	148877	2685619	64000	1367631	274625
132651	250047	29791	8000	15625	2097152	4913	1728000	1953125	1481544	551368	830584

Wetenswaardigheden:

- Er zijn gevallen bekend van orde 32, 64, 81 en 128.
- Tarry heeft een methode gegeven voor orde 128.
- Cazales heeft een methode gegeven voor orde 64 en 81.
- R.V. Heath heeft een methode gegeven voor orde 64, anders dan die van Cazales.

Associatief / symmetrisch magisch vierkant

Definitie:
Een n x n magisch vierkant, waarbij ieder paar getallen symmetrisch tegenover elkaar gelijk is aan $n^2 + 1$

Voorbeeld:

1	15	24	8	17
23	7	16	5	14
20	4	13	22	6
12	21	10	19	3
9	18	2	11	25

Merk hier de plaatsing van de getallen op van bv. 1 en 25, 21 en 5 etc. steeds samen 26

Wetenswaardigheden
Zie Panmagisch vierkant

Concentrisch / Rand magisch vierkant

Definitie:
Een magisch vierkant, dat magisch blijft als de rand wordt weggelaten (ofwel de bovenste en onderste rij en de meest linker en rechter kolom).
Soms komt hier een tweede conditie bij, dat de getallen in deze buitenste rand getallen zijn uit: 1, 2, …, $2n – 2$ en $n^2 – 2n +3$, …, n^2
Indien men deze tweede conditie weglaat wordt dit ook wel een **onregelmatig concentrisch magisch vierkant** genoemd.

Voorbeeld:

64	4	9	54	63	3	10	53
60	15	16	47	48	49	20	5
7	44	22	42	41	25	21	58
51	33	37	29	30	28	38	14
6	32	34	35	36	31	27	59
8	26	40	24	23	43	39	57
52	45	46	18	17	19	50	13
12	61	56	11	2	62	55	1

Merk hier op dat dit voorbeeld dus aan beide voorwaarden voldoet. In de buitenste rand bevinden zich inderdaad de getallen 1, 2, .. ,$2·8 – 2$ en $8^2 – 2·8 + 3$, … , 8^2 ofwel:
1, 2, .. ,14 en 51, … , 64.

Multi / continu concentrisch magisch vierkant

Definitie:
Als bij het herhaald weglaten van de buitenste rand steeds een magisch vierkant over blijft.

Voorbeeld:

22	41	34	27	17	5	29
1	35	6	42	11	31	49
38	10	24	4	47	40	12
37	18	48	25	2	32	13
36	43	3	46	26	7	14
20	19	44	8	39	15	30
21	9	16	23	33	45	28

35	6	42	11	31
10	24	4	47	40
18	48	25	2	32
43	3	46	26	7
19	44	8	39	15

24	4	47
48	25	2
3	46	26

Ingelegde magisch vierkant

Definitie:
Een magisch vierkant waarin magische subvierkanten gevonden kunnen worden, of andere magische aspecten zoals magische diamanten of rechthoeken. De som van de rijen, kolommen en hoofddiagonalen van de ingelegde vierkanten kunnen variëren afhankelijk van de situatie.

Voorbeeld:

46	41	44	47	23	20	17	22
3	32	50	5	40	10	61	59
27	2	29	56	58	37	16	35
51	53	8	26	13	64	34	11
54	25	55	4	**33**	**15**	**60**	14
30	7	28	49	**63**	**36**	**9**	38
6	52	1	31	**12**	**57**	**39**	62
43	48	45	42	18	21	24	19

Antimagisch vierkant

Definitie:
Een n x n vierkant met gehele getallen van 1 tot en met n^2, zodanig dat de sommatie van elke rij, kolom en hoofd diagonaal een rij van opeenvolgende gehele getallen oplevert.

Voorbeeld:

15	2	12	4
1	14	10	5
8	9	3	16
11	13	6	7

De rij sommaties geeft hier (van boven naar beneden): 33, 30, 36 en 37
De kolom sommaties geeft hier (van links naar rechts): 35, 38, 31, 32
De diagonalen sommaties geeft hier (links boven, rechts boven): 39,34
Ofwel de rij: 30, 31 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39

Wetenswaardigheden:

- Een antimagisch vierkant is een speciaal geval van een heterovierkant
- Antimagische vierkanten van orde 1, 2 en 3 zijn onmogelijk. In het geval van orde 3, is er geen bewijs van dit feit, alleen een computer analyse.
- Er zijn 18 families van orde 4 anti magische vierkanten
- J. Cormie en V. Linek hebben een algemene constructie voor vierkanten van orde n voor alle n > 3 recentelijk ontwikkeld.
- Als een antimagisch vierkant van orde n, de getallen 0, 1, …, $n^2 - 2$, $n^2 - 1$ hebben. Dan als een antimagisch vierkant bestaat, zal het of positief zijn met de sommaties [M(n) – n, M(n) + n + 1] of negatief met de sommaties [M(n) – n – 1, M(n) + n] (Madachy 1979)

Alphamagisch vierkant

Definitie:
Een magisch vierkant waarvan het aantal letters in het woord voor ieder getal, een ander magisch vierkant opleveren.
Deze definitie is natuurlijk afhankelijk van de taal die gebruikt wordt

Voorbeeld: (Engelstalig)

5	22	18
28	15	2
12	8	25

4	9	8
11	7	3
6	5	10

five	twenty-two	eighteen
twenty eight	fifteen	two
twelve	eight	twenty-five

Magisch tapijt

Definitie:
Een magisch vierkant waarin getallen meerdere malen mogen voorkomen

Voorbeeld:

0	0	1	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	1	0	0

Magische vierkanten met eigen naam

Lo Shu

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Misschien wel de meest bekende magisch vierkant. Ontdekt door de Chinezen die de naam eraan gaven. Deze orde 3 magisch vierkant is uniek.

L. Sallows magisch vierkant

1	-3	2
-4	12	-8
3	-9	6

Het product hier van de corresponderende 2 x 2 diagonalen zijn 12, 24, 36 en 72, terwijl het product van de getallen in de paren van 3 x 3 diagonalen ook 72 geven

Franklin magisch vierkant

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Benjamin Franklin construeerde bovenstaande 8 x 8 Panmagische vierkant, met de (som) magische constante 260. Elke halve rij of halve kolom in dit vierkant geeft in totaal 130, en de vier hoeken plus de middelste geven 260. Tevens gebogen diagonalen (zoals 52 – -5 – 4 – 0 – 7 – 3 – 6) geven ook 260.

Gnomon magisch vierkant

Een 3x3 vierkant van getallen, waarin elk element in elke 2x2 hoek dezelfde som hebben.

Templar magisch vierkant

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

Een magisch vierkant –achtige indeling van de latijnse zijn “Sator Arepo tenet opera rota” (de boer Arepo houdt de wereld draaiende). Dit vierkant was gevonden bij een opgraving in het oude Pompeii.

J.N. Murray magisch vierkant

1	823	821	809	811	797	19	29	313	31	23	37
89	83	211	79	641	631	619	709	617	53	43	739
97	227	103	107	193	557	719	727	607	139	757	281
223	653	499	197	109	113	563	479	173	761	587	157
367	379	521	383	241	467	257	263	269	167	601	599
349	359	353	647	389	331	317	311	409	307	293	449
503	523	233	337	547	397	421	17	401	271	431	433
229	491	373	487	461	251	443	463	137	439	457	283
509	199	73	541	347	191	181	569	577	571	163	593
661	101	643	239	691	701	127	131	179	613	277	151
659	673	677	683	71	67	61	47	59	743	733	41
827	3	7	5	13	11	787	769	773	419	149	751

Het kleinste magische vierkant met opeenvolgende priemgetallen beginnend met 3 en inclusief het getal 1.

H. Nelson Magisch Vierkant

1480028159	1480028153	1480028201
1480028213	1480028171	1480028129
1480028141	1480028189	1480028183

Een 3 x 3 magisch vierkant met opeenvolgende priemgetallen

Overig

Voor meer speciale magische vierkanten met een eigen naam verwijs ik u naar:
http://mathforum.com/te/exchange/hosted/suzuki/MagicSquare.html

Bronnen

- CRC Concise encyclopedia of mathematics, second edition
- http://www.magic-squares.de
- http://www.geocities.com/~harveyh/self-similar.htm
- http://mathforum.com/te/exchange/hosted/suzuki/MagicSquare.html