CARDANO'S METHODE

(door ing. P.H. Stikker)

Oplossen van een vergelijking van de vorm

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Versie: 18 feb. 2004

LET OP ER ZULLEN NOG ENKELE VOORBEELDEN LATER WORDEN TOEGEVOEGD EN IK HEB HET DOCUMENT NOG NIET ZELF VOOR 100% DOORGENOMEN. GRAAG VERNEEM IK REACTIES VIA PETER.STIKKER@INHOLLAND.NL VOOR ONDUIDELIJKHEDEN, OPMERKINGEN EN/OF FOUTEN.

Inleiding

Dit document is opgesteld om het bewijs en de methode voor het oplossen van een derdegraads vergelijking van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ op te lossen aan de hand van de methode van Cardano.
Ik heb dit document voornamelijk opgesteld aan de hand van de stappen die beschreven zijn op http://thesaurus.maths.org/dictionary/map/word/621.
Hier staat op zich hetzelfde, alleen veel minder uitgewerkt. Voor sommige zullen enkele genomen stappen volstrekt overbodig lijken, voor andere misschien niet.
In de bijlagen staan sommige stappen nog zelfs verder uitgewerkt.
Ik wens u veel leesplezier.

Hoogachtend,

ing. P.H. Stikker

Wat is nieuw in deze versie
Het bleek dat in de vorige versie een ernstige fout zat in het gedeelte 'alles in 1 formule' (met dank aan P.B. Hulshof voor het constateren hiervan). Deze fout is nu eruit en de gevonden formule's zijn nu kloppend (gecheckt met Maple).
Verder wordt er nu ook ingegaan waarom er 6 oplossingen zijn en niet 3 en tevens hoe van een derdemachts wortel alle drie de oplossingen kunnen worden gevonden.
Als laatste zijn er in de bijlagen nog twee voorbeelden toegevoegd op verzoek.
Hopelijk is zo nu alles behandeld en zal dit de laatste versie zijn **J**.

Index

Het bewijs / de methode

We gaan dus een vergelijking van de vorm: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ oplossen

1. Wegwerken van het kwadraat.

We beginnen met het definiëren van een nieuwe variabele y:

$y = x + \frac{b}{3a}$ ofwel:

$x = y - \frac{b}{3a}$

Dit invullen in de vergelijking geeft:

$$a\left(y-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(y-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(y-\frac{b}{3a}\right) + d = 0 \qquad \text{(v1)}$$

Eerst maar de haakjes wegwerken:

$$\begin{aligned}\left(y-\frac{b}{3a}\right)^2 &= \left(y-\frac{b}{3a}\right)\left(y-\frac{b}{3a}\right)\\ &= y^2 - \frac{2b}{3a}y + \frac{b^2}{9a^2} \qquad (1)\end{aligned}$$

Zie ook bijlage 2.1.

En voor:

$$\begin{aligned}\left(y-\frac{b}{3a}\right)^3 &= \left(y-\frac{b}{3a}\right)\left(y-\frac{b}{3a}\right)^2\\ &= \left(y-\frac{b}{3a}\right)\left(y^2 - \frac{2b}{3a}y + \frac{b^2}{9a^2}\right)\\ &= y^3 - \frac{2b}{3a}y^2 + \frac{b^2}{9a^2}y - \frac{b}{3a}y^2 + \frac{2b^2}{9a^2}y - \frac{b^3}{27a^3}\\ &= y^3 - \frac{2b}{3a}y^2 - \frac{b}{3a}y^2 + \frac{b^2}{9a^2}y + \frac{2b^2}{9a^2}y - \frac{b^3}{27a^3}\\ &= y^3 - \frac{3b}{3a}y^2 + \frac{3b^2}{9a^2}y - \frac{b^3}{27a^3}\\ &= y^3 - \frac{b}{a}y^2 + \frac{b^2}{3a^2}y - \frac{b^3}{27a^3} \qquad (2)\end{aligned}$$

Zie ook bijlage 2.2.

De resultaten (1) en (2) gebruiken in vergelijking (v1) en ook maar meteen vermenigvuldigen met het bijbehorende coëfficiënt (a, b en c):

$$ay^3 - a\frac{b}{a}y^2 + a\frac{b^2}{3a^2}y - a\frac{b^3}{27a^3} + by^2 - b\frac{2b}{3a}y + b\frac{b^2}{9a^2} + cy - \frac{cb}{3a} + d = 0$$

Vereenvoudigen:

$$ay^3 - by^2 + \frac{ab^2}{3a^2}y - \frac{ab^3}{27a^3} + by^2 - \frac{2b^2}{3a}y + \frac{b^3}{9a^2} + cy - \frac{cb}{3a} + d = 0$$

ofwel:

$$ay^3 - by^2 + \frac{b^2}{3a}y - \frac{b^3}{27a^2} + by^2 - \frac{2b^2}{3a}y + \frac{b^3}{9a^2} + cy - \frac{cb}{3a} + d = 0$$

Zie ook bijlage 2.3.

$-by^2 + by^2 = 0$ dus die kunnen we eruit halen:

$$ay^3 + \frac{b^2}{3a}y - \frac{b^3}{27a^2} - \frac{2b^2}{3a}y + \frac{b^3}{9a^2} + cy - \frac{cb}{3a} + d = 0 \qquad \text{(v2)}$$

Nu even ordenen, eerst maar alles met een enkele y bijelkaar en vereenvoudigen:

$$\begin{aligned}\frac{b^2}{3a}y - \frac{2b^2}{3a}y + cy &= \left(\frac{b^2}{3a} - \frac{2b^2}{3a} + c\right)y \\ &= \left(\frac{b^2 - 2b^2}{3a} + c\right)y \\ &= \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right)y \\ &= \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)y \qquad \text{(3)}\end{aligned}$$

Hetzelfde voor alles zonder y:

$$\begin{aligned}-\frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{cb}{3a} + d &= -\frac{b^3}{27a^2} + \frac{3b^3}{27a^2} - \frac{cb}{3a} + d \\ &= \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{cb}{3a} + d \qquad \text{(4)}\end{aligned}$$

Opmerking: hier is gebruik gemaakt van: $\frac{b^3}{9a^2} = \frac{b^3}{9a^2}\frac{3}{3} = \frac{3b^3}{27a^2}$

De resultaten van (3) en (4) nu invoeren in vergelijking (v2) krijgen we zo:

$$ay^3+\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)y+\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{cb}{3a}+d=0 \qquad \text{(v3)}$$

Beide kanten delen door a geeft:

$$y^3+\frac{\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)}{a}y+\frac{\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{cb}{3a}+d}{a}=0$$

Nu vervangen:

$$\frac{c-\frac{b^2}{3a}}{a}=p \quad \text{en} \quad \frac{\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{cb}{3a}+d}{a}=q$$

En zo krijgen we nu: (v4)

$$y^3+py+q=0$$

Conclusie

Met de definities van:

$$y = x+\frac{b}{3a} \quad \text{en} \quad p=\frac{c-\frac{b^2}{3a}}{a} \quad \text{en} \quad q=\frac{\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{cb}{3a}+d}{a}$$

Kunnen we een vergelijking van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ombuigen naar: $y^3+py+q=0$ waardoor het kwadraat is verdwenen.

2. De derde macht wegwerken

Tijd voor 2 nieuwe variabele:

$$uv = \frac{p}{3} \qquad \text{ofwel: } 3uv = p$$

en

y = u – v

Invullen in de vergelijking (v4) geeft:

$$\begin{aligned} y^3 + py + q &= (u-v)^3 + 3uv(u-v) + q && = 0 \\ &= u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + 3u^2v - 3uv^2 + q && = 0 \\ &= u^3 - v^3 + q && = 0 \qquad \text{(v5)} \end{aligned}$$

zie ook bijlage 2.4.

Maar ook geldt natuurlijk:

$uv = \frac{p}{3}$ => $v = \frac{p}{3u}$

Dit nu invoeren in (v5):

$$\begin{aligned} u^3 - v^3 + q &= u^3 - \left(\frac{p}{3u}\right)^3 + q && = 0 \\ &= u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q && = 0 \\ &= u^3u^3 - u^3\frac{p^3}{27u^3} + qu^3 && = 0 \\ &= \left(u^3\right)^2 - \frac{p^3}{27} + qu^3 && = 0 \end{aligned}$$

Vervangen we u^3 door bv. g dan krijgen we:

$$g^2 + qg - \frac{p^3}{27} = 0 \qquad \text{(v6)}$$

Hierin zijn dus q en p reeds te berekenen (constant) en is dit dus een kwadratische functie wat met de abcD formule is op te lossen.

De methode

De te ondernemen stappen zijn dus eigenlijk als volgt:

1. Bereken p en q, met $\dfrac{c-\dfrac{b^2}{3a}}{a}=p$ en $\dfrac{\dfrac{2b^3}{27a^2}-\dfrac{cb}{3a}+d}{a}=q$
2. Bereken g door $g^2+qg-\dfrac{p^3}{27}$ op te lossen met de abcD-formule (zal 0, 1 of 2 antwoorden geven).
3. Bereken u door middel van: u = $\sqrt[3]{g}$ (zal 3 antwoorden opleveren)
4. Bereken v met $v=\dfrac{p}{3u}$
5. Bereken y met y = u – v
6. Bereken x met x = y – $\dfrac{b}{3a}$

Alles in 1 formule.

Nu we toch hebben aangetoond dat deze methode werkt kunnen we alles ook in 1 formule krijgen.

1. Bereken p en q, met $\frac{c-\frac{b^2}{3a}}{a}=p$ en $\frac{\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{cb}{3a}+d}{a}=q$
2. Bereken g door $g^2+qg-\frac{p^3}{27}$ op te lossen met de abcD-formule (zal 0, 1 of 2 antwoorden geven).
3. Bereken u door middel van: u = $\sqrt[3]{g}$ (zal 3 antwoorden opleveren)
4. Bereken v met $v=\frac{p}{3u}$
5. Bereken y met y = u – v
6. Bereken x met x = y – $\frac{b}{3a}$

Stap 1 invoeren in stap 2

We hebben:

$$p=\frac{c-\frac{b^2}{3a}}{a} \qquad q=\frac{\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{cb}{3a}+d}{a}$$

Dus oplossen:

g^2 + qg - $\frac{p^3}{27}$ = 0 staat nu gelijk aan:

$$g^2+\frac{\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{cb}{3a}+d}{a}g-\frac{\left(\frac{c-\frac{b^2}{3a}}{a}\right)^3}{27}=0$$

Dit is nog te vereenvoudigen want:

$$\frac{\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{cb}{3a}+d}{a}=\frac{2b^3-9acb+27da^2}{27a^3}$$

Zie ook bijlage 2.5.

En verder nog:

$$\frac{\left(\frac{c-\frac{b^2}{3a}}{a}\right)^3}{27}=\frac{(3ca-b^2)^3}{729a^6}.$$

Ofwel we hebben nu:

$$g^2 + \frac{\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{cb}{3a} + d}{a} g - \frac{\left(\frac{c - \frac{b^2}{3a}}{a} \right)^3}{27} = 0$$

is hetzelfde als:

$$g^2 + \frac{2b^3 - 9acb + 27da^2}{27a^3} g - \frac{(3ca - b^2)^3}{729a^6} = 0$$

Nu de abcD-formule invullen, met de juiste coefficienten:

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ echter we hebben reeds een a, b en c, dus even vervangen door andere variabelen: *a* => *k*, *b* => *m*, c => *n*

$\frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4kn}}{2k}$ en dus met:

k = 1

m = $\frac{2b^3 - 9acb + 27da^2}{27a^3}$

n = $-\frac{(3ca - b^2)^3}{729a^6}$

Dan krijgen we dus:

$$g_{1,2} = \frac{-\frac{2b^3 - 9acb + 27da^2}{27a^3} \pm \sqrt{\left(\frac{2b^3 - 9acb + 27da^2}{27a^3}\right)^2 - 4\left(-\frac{(3ca - b^2)^3}{729a^6}\right)}}{2}$$

$$= \frac{-\frac{2b^3 - 9acb + 27da^2}{27a^3} \pm \sqrt{\left(\frac{2b^3 - 9acb + 27da^2}{27a^3}\right)^2 + \frac{4(3ca - b^2)^3}{729a^6}}}{2}$$

Dat wordt weer vereenvoudigen:

$$\left(\frac{2b^3 - 9acb + 27da^2}{27a^3}\right)^2 = \frac{\left(2b^3 - 9acb + 27da^2\right)^2}{\left(27a^3\right)^2}$$

$$= \frac{\left(2b^3 - 9acb + 27da^2\right)\left(2b^3 - 9acb + 27da^2\right)}{27^2\left(a^3\right)^2}$$

$$= \frac{4b^6 - 36cab^4 + 108b^3da^2 + 81c^2a^2b^2 - 486cba^3d + 729d^2a^4}{729a^6}$$

$$\frac{4(3ca - b^2)^3}{729a^6} = \frac{4(27c^3a^3 - 27c^2a^2b^2 + 9cab^4 - b^6)}{729a^6}$$

$$= \frac{108c^3a^3 - 108c^2a^2b^2 + 36cab^4 - 4b^6}{729a^6}$$

En dus bijelkaar:

$$g_{1,2} = \frac{4b^6 - 36cab^4 + 108b^3da^2 + 81c^2a^2b^2 - 486cba^3d + 729d^2a^4}{729a^6} + \frac{108c^3a^3 - 108c^2a^2b^2 + 36cab^4 - 4b^6}{729a^6}$$

$$= \frac{4b^6 - 36cab^4 + 108b^3da^2 + 81c^2a^2b^2 - 486cba^3d + 729d^2a^4 + 108c^3a^3 - 108c^2a^2b^2 + 36cab^4 - 4b^6}{729a^6}$$

$$= \frac{108b^3da^2 - 27c^2a^2b^2 - 486cba^3d + 729d^2a^4 + 108c^3a^3}{729a^6}$$

$$= \frac{4b^3da^2 - c^2a^2b^2 - 18cba^3d + 27d^2a^4 + 4c^3a^3}{27a^6}$$

$$= \frac{4b^3d - c^2b^2 - 18cbad + 27d^2a^2 + 4c^3a}{27a^4}$$

Ofwel:

$$g_{1,2} = \frac{-\dfrac{2b^3 - 9acb + 27da^2}{27a^3} \pm \sqrt{\left(\dfrac{2b^3 - 9acb + 27da^2}{27a^3}\right)^2 + \dfrac{4(3ca - b^2)^3}{729a^6}}}{2}$$

$$= \frac{-\dfrac{2b^3 - 9acb + 27da^2}{27a^3} \pm \sqrt{\dfrac{4b^3d - c^2b^2 - 18cbad + 27d^2a^2 + 4c^3a}{27a^4}}}{2}$$

Verder is nog te vereenvoudigen:

$$\sqrt{\frac{4b^3d - c^2b^2 - 18cbad + 27d^2a^2 + 4c^3a}{27a^4}} = \pm\frac{1}{a^2}\frac{1}{9}\sqrt{3}\sqrt{4b^3d - c^2b^2 - 18cbad + 27d^2a^2 + 4c^3a}$$

Zie ook bijlage 2.7.

En dus:

$$g_{1,2} = \frac{-\frac{2b^3 - 9acb + 27da^2}{27a^3} \pm \pm \frac{1}{a^2}\frac{1}{9}\sqrt{3}\sqrt{4b^3d - c^2b^2 - 18cbad + 27d^2a^2 + 4c^3a}}{2}$$

$$= \frac{-2b^3 + 9acb - 27da^2 \pm 3a\sqrt{3}\sqrt{4b^3d - c^2b^2 - 18cbad + 27d^2a^2 + 4c^3a}}{54a^3}$$

Zie ook bijlage 2.8.

Ik wil nu even om het overzichtelijk te houden een tijdelijke variabele lanceren, die ik even *j* noem en als volgt definier:

$$j = \sqrt{4b^3d - c^2b^2 - 18cbad + 27d^2a^2 + 4c^3a}$$

Dus hebben we nu voor *g*:

$$\frac{-2b^3 + 9acb - 27da^2 + 3aj\sqrt{3}}{54a^3} \text{ en } \frac{-2b^3 + 9acb - 27da^2 - 3aj\sqrt{3}}{54a^3}$$

eerst verder met de '+' variant.

Stap 2 invoeren in Stap 3

$$u = \sqrt[3]{g}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-2b^3 + 9acb - 27da^2 + 3aj\sqrt{3}}{54a^3}}$$

$$= \frac{1}{54a}\sqrt[3]{2916}\sqrt[3]{-2b^3 + 9acb - 27da^2 + 3aj\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2916}\sqrt[3]{-2b^3 + 9acb - 27da^2 + 3aj\sqrt{3}}}{54a}$$

Om het straks allemaal enigzinds overzichtelijk te houden even weer een nieuwe variabele lanceren:

$$t = \sqrt[3]{-2b^3 + 9acb - 27da^2 + 3aj\sqrt{3}}$$

en zo krijgen we dan:

$$u = \frac{t\sqrt[3]{2916}}{54a}$$

Stap 3 invoeren in Stap 4

$$v = \frac{p}{3u}$$

$$= \frac{\dfrac{c - \dfrac{b^2}{3a}}{a}}{3 \cdot \dfrac{t\sqrt[3]{2916}}{54a}}$$

$$= \frac{18ac - 6b^2}{at\sqrt[3]{2916}}$$

Zie ook bijlage 2.9.

Stap 4 invoeren in Stap 5

$$y = u - v$$

$$= \frac{t\sqrt[3]{2916}}{54a} - \frac{18ac - 6b^2}{at\sqrt[3]{2916}}$$

$$= \frac{\left(t\sqrt[3]{2916}\right)^2}{54at\sqrt[3]{2916}} - \frac{54\left(18ac - 6b^2\right)}{54at\sqrt[3]{2916}}$$

$$= \frac{\left(t\sqrt[3]{2916}\right)^2 - 54\left(18ac - 6b^2\right)}{54at\sqrt[3]{2916}}$$

$$= \frac{\left(t\sqrt[3]{2916}\right)^2 - 972ac + 324b^2}{54at\sqrt[3]{2916}}$$

Stap 5 invoeren in Stap 6

$$x = y - \frac{b}{3a}$$

$$= \frac{\left(t\sqrt[3]{2916}\right)^2 - 972ac + 324b^2}{54at\sqrt[3]{2916}} - \frac{b}{3a}$$

Dit maar eens gaan vereenvoudigen.
Er geldt natuurlijk:

$$t\left(\sqrt[3]{2916}\right)^2 = t^2\left(\sqrt[3]{2916}\right)^2$$

Verder ook :

$$\left(\sqrt[3]{2916}\right)^2 = \sqrt[3]{2916^2}$$

$$= \sqrt[3]{8503056}$$

$$= 162\sqrt[3]{2}$$

en dus:

$$x = \frac{\left(t\sqrt[3]{2916}\right)^2 - 972ac + 324b^2}{54at\sqrt[3]{2916}} - \frac{b}{3a}$$

$$= \frac{162t^2\sqrt[3]{2} - 972ac + 324b^2}{54at\sqrt[3]{2916}} - \frac{b}{3a}$$

Verder nog:

$$\sqrt[3]{2916} = 9\sqrt[3]{4}$$

En dus:

$$x = \frac{162t^2\sqrt[3]{2} - 972ac + 324b^2}{54at9\sqrt[3]{4}} - \frac{b}{3a}$$

$$= \frac{162t^2\sqrt[3]{2} - 972ac + 324b^2}{at486\sqrt[3]{4}} - \frac{b}{3a}$$

$$= \frac{t^2\sqrt[3]{2} - 6ac + 2b^2}{3at\sqrt[3]{4}} - \frac{b}{3a}$$

Omdat *t* ook een derdemacht wortel is geldt:

$$t\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4}\sqrt[3]{-2b^3 + 9acb - 27da^2 + 3aj\sqrt{3}}$$

$$\sqrt[3]{4\left(-2b^3 + 9acb - 27da^2 + 3aj\sqrt{3}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{-8b^3 + 36acb - 108da^2 + 12aj\sqrt{3}}$$

Laten we *k* nu definieren als:

$$k=\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12aj\sqrt{3}}$$

$$x \quad = \frac{t^2\sqrt[3]{2}-6ac+2b^2}{3at\sqrt[3]{4}}-\frac{b}{3a}$$

$$= \frac{t^2\sqrt[3]{2}-6ac+2b^2}{3ak}-\frac{b}{3a}$$

$$= \frac{t^2\sqrt[3]{2}}{3ak}-\frac{6ac-2b^2}{3ak}-\frac{b}{3a}$$

$$= \frac{t^2\sqrt[3]{2}}{3at\sqrt[3]{4}}-\frac{6ac-2b^2}{3ak}-\frac{b}{3a}$$

$$= \frac{t\sqrt[3]{2}}{3a\sqrt[3]{4}}-\frac{6ac-2b^2}{3ak}-\frac{b}{3a}$$

$$= \frac{t\sqrt[3]{4}}{3a2}-\frac{6ac-2b^2}{3ak}-\frac{b}{3a}$$

$$= \frac{k}{6a}-\frac{6ac-2b^2}{3ak}-\frac{b}{3a}$$

$$= \frac{k}{6a}-\frac{2\left(3ac-b^2\right)}{3ak}-\frac{b}{3a}$$

Nu eens alles terug invullen geeft:

$k=\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12aj\sqrt{3}}$ en $j=\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}$

Dus samen:

$k=\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12a\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}\sqrt{3}}$

en dus:

$$x = \frac{\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12a\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}\sqrt{3}}}{6a} - \frac{2\left(3ac-b^2\right)}{3a\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12a\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}\sqrt{3}}} - \frac{b}{3a}$$

Maar er zijn toch drie oplossingen?

Er geldt algemeen (zie bijlage 1):

$\sqrt[3]{h}$

oplossing 1= $\sqrt[3]{h}$

oplossing 2 = $\frac{-\sqrt[3]{h}}{2}+i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{h}}{2}$

oplossing 3 = $\frac{-\sqrt[3]{h}}{2}-i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{h}}{2}$

De tweede oplossing:

Voordat we verder gaan, laten we even een vereenvoudiging toepassen:

h = $-8b^3+36acb-108da^2+12a\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}\sqrt{3}$

$$=-8b^3+36acb-108da^2+12aj\sqrt{3}$$

En dus:

x = $\frac{\sqrt[3]{h}}{6a}-\frac{2(3ac-b^2)}{3a\sqrt[3]{h}}-\frac{b}{3a}$

$$\frac{\sqrt[3]{h}}{6a}-\frac{2(3ac-b^2)}{3a\sqrt[3]{h}}-\frac{b}{3a} \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{-\sqrt[3]{h}}{2}+i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{h}}{2}}{6a}-\frac{2(3ac-b^2)}{3a\left(\frac{-\sqrt[3]{h}}{2}+i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{h}}{2}\right)}-\frac{b}{3a}$$

De eerste term weer bekijken

$$\frac{\frac{-\sqrt[3]{h}}{2}+i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{h}}{2}}{6a}=\frac{\frac{-\sqrt[3]{h}}{2}}{6a}+\frac{i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{h}}{2}}{6a}$$

$$=\frac{-\sqrt[3]{h}}{12a}+i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{h}}{12a}$$

De tweede term

$$\frac{2\left(3ac-b^2\right)}{3a\left(\frac{-\sqrt[3]{h}}{2}+i\sqrt{3}\,\frac{\sqrt[3]{h}}{2}\right)} = \frac{2\left(3ac-b^2\right)}{\frac{-3a\sqrt[3]{h}}{2}+i3a\sqrt{3}\,\frac{\sqrt[3]{h}}{2}}$$

$$= \frac{2\left(3ac-b^2\right)}{\frac{-3a\sqrt[3]{h}+i3a\sqrt{3}\sqrt[3]{h}}{2}}$$

$$= \frac{4\left(3ac-b^2\right)}{-3a\sqrt[3]{h}+i3a\sqrt{3}\sqrt[3]{h}}$$

$$= \frac{4\left(3ac-b^2\right)}{3a\sqrt[3]{h}\left(-1+i\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{4\left(3ac-b^2\right)\frac{1}{4}\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{3a\sqrt[3]{h}\left(-1+i\sqrt{3}\right)\frac{1}{4}\left(-1-i\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{\left(3ac-b^2\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{3a\sqrt[3]{h}}$$

$$= \frac{-3ac+b^2-3aci\sqrt{3}+b^2i\sqrt{3}}{3a\sqrt[3]{h}}$$

$$= \frac{-3ac+b^2}{3a\sqrt[3]{h}}-\frac{3aci\sqrt{3}+b^2i\sqrt{3}}{3a\sqrt[3]{h}}$$

$$= \frac{-3ac+b^2}{3a\sqrt[3]{h}}-\frac{\left(3ac+b^2\right)i\sqrt{3}}{3a\sqrt[3]{h}}$$

En dus krijgen we samen:

$$x = \frac{-\sqrt[3]{h}}{12a} + i\sqrt{3}\,\frac{\sqrt[3]{h}}{12a} - \left(\frac{-3ac+b^2}{3a\sqrt[3]{h}} - \frac{(3ac+b^2)i\sqrt{3}}{3a\sqrt[3]{h}} \right) - \frac{b}{3a}$$

$$= \frac{-\sqrt[3]{h}}{12a} + i\sqrt{3}\,\frac{\sqrt[3]{h}}{12a} + \frac{3ac+b^2}{3a\sqrt[3]{h}} + \frac{(3ac+b^2)i\sqrt{3}}{3a\sqrt[3]{h}} - \frac{b}{3a}$$

$$= \frac{-\sqrt[3]{h}}{12a} + \frac{3ac+b^2}{3a\sqrt[3]{h}} - \frac{b}{3a} + i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{h}}{12a} + \frac{3ac+b^2}{3a\sqrt[3]{h}} \right)$$

$$= \frac{-\sqrt[3]{h}}{12a} + \frac{3ac+b^2}{3a\sqrt[3]{h}} - \frac{b}{3a} + i\,\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{h}}{6a} + \frac{2(3ac+b^2)}{3a\sqrt[3]{h}} \right)$$

Nu h weer invullen geeft:

$$\frac{-\sqrt[3]{h}}{12a} + \frac{3ac+b^2}{3a\sqrt[3]{h}} - \frac{b}{3a} + i\,\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{h}}{6a} + \frac{2(3ac+b^2)}{3a\sqrt[3]{h}} \right) =$$

$$\frac{-\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12a\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}\sqrt{3}}}{12a} + \frac{3ac+b^2}{3a\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12a\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}\sqrt{3}}} - \frac{b}{3a} +$$

$$i\,\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12a\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}\sqrt{3}}}{6a} + \frac{2(3ac+b^2)}{3a\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12a\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}\sqrt{3}}} \right)$$

De derde oplossing

$$\frac{\sqrt[3]{h}}{6a}-\frac{2\left(3ac-b^{2}\right)}{3a\sqrt[3]{h}}-\frac{b}{3a} \Rightarrow \frac{-\sqrt[3]{h}}{2}-i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{h}}{2}$$

$$\frac{\frac{-\sqrt[3]{h}}{2}-i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{h}}{2}}{6a}-\frac{2\left(3ac-b^{2}\right)}{3a\left(\frac{-\sqrt[3]{h}}{2}-i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{h}}{2}\right)}-\frac{b}{3a}$$

De eerste term weer bekijken

$$\frac{\frac{-\sqrt[3]{h}}{2}-i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{h}}{2}}{6a}=\frac{\frac{-\sqrt[3]{h}}{2}}{6a}-\frac{i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{h}}{2}}{6a}$$

$$=\frac{-\sqrt[3]{h}}{12a}-i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{h}}{12a}$$

De tweede term

$$\frac{2\left(3ac-b^2\right)}{3a\left(\frac{-\sqrt[3]{h}}{2}-i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{h}}{2}\right)} = \frac{2\left(3ac-b^2\right)}{\frac{-3a\sqrt[3]{h}}{2}-i3a\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{h}}{2}}$$

$$= \frac{2\left(3ac-b^2\right)}{\frac{-3a\sqrt[3]{h}-i3a\sqrt{3}\sqrt[3]{h}}{2}}$$

$$= \frac{4\left(3ac-b^2\right)}{-3a\sqrt[3]{h}-i3a\sqrt{3}\sqrt[3]{h}}$$

$$= \frac{4\left(3ac-b^2\right)}{3a\sqrt[3]{h}\left(-1-i\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{4\left(3ac-b^2\right)\frac{1}{4}\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{3a\sqrt[3]{h}\left(-1+i\sqrt{3}\right)\frac{1}{4}\left(-1+i\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{\left(3ac-b^2\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{3a\sqrt[3]{h}}$$

$$= \frac{-3ac+b^2+3aci\sqrt{3}-b^2i\sqrt{3}}{3a\sqrt[3]{h}}$$

$$= \frac{-3ac+b^2}{3a\sqrt[3]{h}}+\frac{3aci\sqrt{3}-b^2i\sqrt{3}}{3a\sqrt[3]{h}}$$

$$= \frac{-3ac+b^2}{3a\sqrt[3]{h}}+\frac{\left(3ac-b^2\right)i\sqrt{3}}{3a\sqrt[3]{h}}$$

En dus krijgen we samen:

$$x = \frac{-\sqrt[3]{h}}{12a} - i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{h}}{12a} - \left(\frac{-3ac+b^2}{3a\sqrt[3]{h}} + \frac{(3ac-b^2)i\sqrt{3}}{3a\sqrt[3]{h}}\right) - \frac{b}{3a}$$

$$= \frac{-\sqrt[3]{h}}{12a} - i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{h}}{12a} + \frac{3ac-b^2}{3a\sqrt[3]{h}} - \frac{(3ac-b^2)i\sqrt{3}}{3a\sqrt[3]{h}} - \frac{b}{3a}$$

$$= \frac{-\sqrt[3]{h}}{12a} + \frac{3ac-b^2}{3a\sqrt[3]{h}} - \frac{b}{3a} - i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{h}}{12a} + \frac{3ac-b^2}{3a\sqrt[3]{h}}\right)$$

$$= \frac{-\sqrt[3]{h}}{12a} + \frac{3ac-b^2}{3a\sqrt[3]{h}} - \frac{b}{3a} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{h}}{6a} + \frac{2(3ac-b^2)}{3a\sqrt[3]{h}}\right)$$

Nu *h* weer invullen geeft:

$$\frac{-\sqrt[3]{h}}{12a} + \frac{3ac-b^2}{3a\sqrt[3]{h}} - \frac{b}{3a} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{h}}{6a} + \frac{2(3ac-b^2)}{3a\sqrt[3]{h}}\right) =$$

$$\frac{-\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12a\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}\sqrt{3}}}{12a} + \frac{3ac-b^2}{3a\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12a\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}\sqrt{3}}} - \frac{b}{3a} -$$

$$i\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12a\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}\sqrt{3}}}{6a} + \frac{2(3ac-b^2)}{3a\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12a\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}\sqrt{3}}}\right)$$

De drie oplossingen

$$x = \frac{\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12a\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}\sqrt{3}}}{6a} - \frac{2\left(3ac-b^2\right)}{3a\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12a\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}\sqrt{3}}} - \frac{b}{3a}$$

$$x = \frac{-\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12a\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}\sqrt{3}}}{12a} + \frac{3ac+b^2}{3a\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12a\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}\sqrt{3}}} - \frac{b}{3a} +$$
$$i\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12a\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}\sqrt{3}}}{6a} + \frac{2\left(3ac+b^2\right)}{3a\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12a\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}\sqrt{3}}}\right)$$

$$x = \frac{-\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12a\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}\sqrt{3}}}{12a} + \frac{3ac-b^2}{3a\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12a\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}\sqrt{3}}} - \frac{b}{3a} -$$
$$i\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12a\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}\sqrt{3}}}{6a} + \frac{2\left(3ac-b^2\right)}{3a\sqrt[3]{-8b^3+36acb-108da^2+12a\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}\sqrt{3}}}\right)$$

Waarom er niet 6 maar twee oplossingen zijn….

We hebben nu de '+' variant van *g* genomen. De '-' variant zal dezelfde antwoorden geven.

Het probleem ontstond bij de oplossingen voor:

$$g^2 + qg - \frac{p^3}{27} = 0$$

Dit geeft algemeen als oplossing

$$g_1 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \text{ en } g_2 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

Als we nu verder gaan met g_1 dan wordt $u = \sqrt[3]{g} = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}$

En voor *v*

$$v = \frac{p}{3u} = \frac{p}{3\sqrt[3]{g}} = \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}}$$

$$v^3 = \frac{p^3}{27\dfrac{-q+\sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{27}}}{2}}$$

$$= \frac{2p^3}{-27q+27\sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{27}}}$$

$$= \frac{2}{27}\frac{\left(-q-\sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{27}}\right)p^3}{\left(-q+\sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{27}}\right)\left(-q-\sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{27}}\right)}$$

$$= \frac{2}{27}\frac{\left(-q-\sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{27}}\right)p^3}{q^2-q^2-\dfrac{4p^3}{27}}$$

$$= \frac{2\left(-q-\sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{27}}\right)p^3}{-4p^3}$$

$$= \frac{-q-\sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{27}}}{-2}$$

$$= \frac{q+\sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{27}}}{2}$$

En wordt dus $y = u - v$ gelijk aan:

$$\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{27}}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{27}}}{2}}$$

Als we hetzelfde verhaal nu doen voor g_2 krijgen we:

$$u = \sqrt[3]{g} = \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

$$v = \frac{p}{3u} = \frac{p}{3\sqrt[3]{g}} = \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}}$$

$$v^3 = \frac{p^3}{27\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

$$= \frac{2p^3}{-27q-27\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}$$

$$= \frac{2}{27}\frac{\left(-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}\right)p^3}{\left(-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}\right)\left(-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}\right)}$$

$$= \frac{2}{27}\frac{\left(-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}\right)p^3}{q^2-q^2-\frac{4p^3}{27}}$$

$$= \frac{2\left(-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}\right)p^3}{-4p^3}$$

$$= \frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{-2}$$

En is dus $y = u - v$ nu:

$$\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{-2}}$$

Dus de twee verschillende oplossingen zijn dus:

$$\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}} \text{ en } \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{-2}}$$

Maar deze zijn aan elkaar gelijk:

$$\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}} = -\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{-2}}+\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{-2}}$$

Dus zullen de oplossingen of we nu g_1 of g_2 gebruiken uiteindelijk ook hetzelfde zijn.

Cardano werkt niet

Een voorbeeld

Neem de volgende vergelijking:

$0 = 3x^3 + 18x^2 + 36x + 24$

Ofwel:

a = 3
b = 18
c = 36
d = 24

Dan geldt:

$$p = \frac{36 - \frac{18^2}{3 \cdot 3}}{3} = 0$$

$$q = \frac{\frac{2 \cdot 18^3}{27 \cdot 3^2} - \frac{36 \cdot 18}{3 \cdot 3} + 24}{3} = 0$$

Alhoewel dit reeds merkwaardig is, geeft dit nog geen problemen.

$$0 = g^2 + qg - \frac{p^3}{27} = g^2$$

g = 0

Ook tot nu toe nog geen problemen.

$u = \sqrt[3]{0} = 0$

Kan ook nog net, maar:

$v = \frac{p}{3u} = \frac{0}{0} =$ onbepaald.

We hebben dus een probleem.

Oorzaak probleem

Het probleem ontstaat omdat u = 0, ofwel:

$\sqrt[3]{g}$ = 0, ofwel g = 0

Dus:

$$0 = g^2 + qg - \frac{p^3}{27}$$

g = 0 invullen geeft:

$$0 = -\frac{p^3}{27}$$

Uitwerken geeft:

p = 0

Nu de definitie van p gebruiken geeft:

$$0 = \frac{c - \frac{b^2}{3a}}{a}$$

Ofwel:

$$0 = c - \frac{b^2}{3a}$$

Oplossen met de abcD-formule geeft:

$b = \sqrt{3}\sqrt{ca}$ of $b = -\sqrt{3}\sqrt{ca}$

In het voorbeeld is dit inderdaad waar:

$$b = \sqrt{3}\sqrt{ca}$$
$$b = \sqrt{3}\sqrt{3 \cdot 36}$$
$$b = 18$$

En inderdaad konden we de vergelijking niet oplossen.

Probleem oplossen

Als Cardano dus niet werkt, weten we dat geldt:

$$b = \sqrt{3}\sqrt{ca}$$

of

$$-b = \sqrt{3}\sqrt{ca}$$

Ofwel, we hebben dus een vergelijking van de vorm:

$$ax^3 + x^2\sqrt{3}\sqrt{ca} + cx + d = 0$$

We gebruiken gewoon opnieuw:

$$\frac{c - \frac{b^2}{3a}}{a} = p \quad \text{en} \quad \frac{\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{cb}{3a} + d}{a} = q$$

Maar nu dus:

$$p = \frac{c - \frac{\left(\sqrt{3}\sqrt{ca}\right)^2}{3a}}{a} = \frac{c - \frac{\left(\sqrt{3}\sqrt{ca}\right)^2}{3a}}{a} = \frac{c - \frac{3ca}{3a}}{a} = \frac{c-c}{a} = 0$$

en

$$q = \frac{\frac{2\left(\sqrt{3}\sqrt{ca}\right)^3}{27a^2} - \frac{c\left(\sqrt{3}\sqrt{ca}\right)}{3a} + d}{a} = \frac{-c\sqrt{3}\sqrt{ca}}{9a} + d$$

En dus hebben we een vergelijking van de vorm:

$$y^3 + q = 0$$

En geldt er dus:

$$y = \sqrt[3]{-q}$$

Als dan y eenmaal gevonden is geldt natuurlijk nog steeds dat:

$$x = y - \frac{b}{3a}$$

In dit geval dus:

$$x = y - \frac{\sqrt{3}\sqrt{ca}}{3a}$$

In het voorbeeld is q = 0 en krijgen we dus als oplossing:

$$x = 0 - \frac{\sqrt{3}\sqrt{36 \cdot 3}}{3 \cdot a} = -2$$

Bijlagen

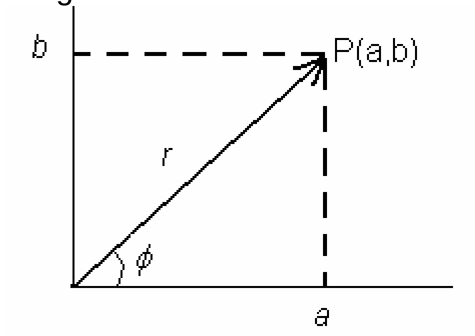
1. Derdemacht wortels

1.1. De oplossingen van $\sqrt[3]{h}$

Ieder getal valt als een complex getal te noteren, zelfs als het geen complex getal is.
a + bi

Nu valt ieder complex getal ook met poolcoordinaten te schrijven. Poolcoordinaten is een andere manier om een punt aan te geven. Normaal gebruikt men *x* en *y*. Bij poolcoordinaten gebruikt men de lengte van de vector (*r*) en de hoek met de positieve *x* (f) as.

Een complex getal wordt tevens aangegeven door middel van het complexe vlak. Waarin het reele gedeelte van het complexe getal (*a*) op de horizontale as wordt aangegeven, en het imaginaire gedeelte (*b*) op de verticale as.
Hieronder een grafische weergave:



Het mag duidelijk zijn dat dus:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

en

$$\tan f = \frac{b}{a}$$

En tevens:

$$a = r\cos(f)$$
$$b = r\sin(f)$$

en dus:

$$a + bi = r\cos(f) + ri\sin(f)$$

$$= r(\cos(f) + i\sin(f))$$

Vervolgens hebben we nog een laatste herschrijving nodig.
In de reele getallen kennen we de exponentiele functie $f(x) = e^x$ met de volgende eigenschappen:

1) $f(0) = 1$
2) $f(x_1 + x_2)$ = $f(x_1) \cdot f(x_2)$ ofwel $e^{x_1 \cdot x_2}$ = $e^{x_1} \cdot e^{x_2}$
3) $f(x) > 0$, in het bijzonder $f(x) \neq 0$

Dan bekijken we nu de functie E van C naar C, gedefinieerd door:
Alz z = a + bi dan $E(z) = e^x(\cos b + i \sin b)$.
Voor reele waarden van z geldt dat het imaginaire gedeelte (Im(z)) gelijk is aan 0, ofwel b= 0.
Dus als z een element is van de reele getallen volgt precies:
z = a => $E(a) = e^a(\cos 0 + i \sin 0) = e^a(1+0) = e^a$

Laten we de eigenschappen nu eens gaan testen.

1) $E(0) = e^0(\cos 0 + i \sin 0) = e^0(1+0) = 1(1+0) = 1$
2) $E(z_1 + z_2)$ = $e^{a_1+a_2}(\cos(b_1 + b_2) + i \sin(b_1 + b_2))$
   = $e^{a_1} e^{a_2}(\cos b_1 \cos b_2 - \sin b_1 \sin b_2 + i(\sin b_1 \cos b_2 + \sin b_2 \cos b_1))$
   = $e^{a_1}(\cos b_1 + i \sin b_1) e^{a_2}(\cos b_2 + i \sin b_2)$
   = $E(z_1) \cdot E(z_2)$

Voor de derde eigenschap kunnen we gebruik maken via een bewijs uit het ongerijmde.

als $E(z)$ = 0 dan moet gelden $e^a(\cos b + i \sin b)$ = 0. en dus moet dan $\cos b + i \sin b$ = 0
Maar dan moet ook gelden: $i \sin b = -\cos b$. Maar dat kan niet omdat we nu links een complex getal hebben staan en rechts niet.

Er is dus voldaan aan alle voorwaarden, dus we kunnen definieren:

$$e^z = E(z)$$

Voor een (zuiver) imaginair getal *z* geldt dan dus
$E(iy) = e^0(\cos y + i \sin y) = \cos y + i \sin y$ => $e^{iy} = \cos y + i \sin y$

En dus nog algemener:
$r(\cos(f) + i \sin(f))$ = re^{ifp}

$a + bi$ = $r(\cos(f) + i \sin(f))$ = re^{ifp}

Dan nu eindelijk de oplossing.

De algemene oplossing voor $z^n = c$ met $c = a + bi$ wordt dan:

$$z^n = re^{(f+2kp)i} = r^{\frac{1}{n}}e^{\left(\frac{f}{n}+\frac{2kp}{n}\right)i}$$

met $k = 0..\ n - 1$

In ons geval is $k = 3$, dus:

$$z^3 = r^{\frac{1}{3}}e^{\left(\frac{f}{3}+\frac{2kp}{3}\right)i}$$

met $k = 0..2$

Voor $k = 0$

$$\begin{aligned} r^{\frac{1}{3}}e^{\frac{f}{3}i} &= r^{\frac{1}{3}}\left(e^{fi}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= r^{\frac{1}{3}}(\cos(f)+i\sin(f))^{\frac{1}{3}} \\ &= (r(\cos(f)+i\sin(f)))^{\frac{1}{3}} \\ &= (a+bi)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Voor $k = 1$

$$\begin{aligned} r^{\frac{1}{3}}e^{\left(\frac{f}{3}+\frac{2kp}{3}\right)i} &= r^{\frac{1}{3}}e^{\left(\frac{f}{3}+\frac{2p}{3}\right)i} \\ &= r^{\frac{1}{3}}e^{\frac{f}{3}i+\frac{2p}{3}i} \\ &= r^{\frac{1}{3}}e^{fi\frac{1}{3}}e^{\frac{2p}{3}i} \\ &= r^{\frac{1}{3}}\left(e^{fi}\right)^{\frac{1}{3}}e^{\frac{2p}{3}i} \\ &= (a+bi)^{\frac{1}{3}}e^{\frac{2p}{3}i} \\ &= (a+bi)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\left(\frac{2p}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2p}{3}\right)\right) \\ &= (a+bi)^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -\frac{(a+bi)^{\frac{1}{3}}}{2}+i(a+bi)^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Voor k = 3

$$r^{\frac{1}{3}}e^{\left(\frac{f}{3}+\frac{2kp}{3}\right)i} = r^{\frac{1}{3}}e^{\left(\frac{f}{3}+\frac{4p}{3}\right)i}$$

$$= r^{\frac{1}{3}}e^{\frac{f}{3}i+\frac{4p}{3}i}$$

$$= r^{\frac{1}{3}}e^{fi\frac{1}{3}}e^{\frac{4p}{3}i}$$

$$= r^{\frac{1}{3}}\left(e^{fi}\right)^{\frac{1}{3}}e^{\frac{4p}{3}i}$$

$$= (a+bi)^{\frac{1}{3}}e^{\frac{4p}{3}i}$$

$$= (a+bi)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\left(\frac{4p}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4p}{3}\right)\right)$$

$$= (a+bi)^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\frac{(a+bi)^{\frac{1}{3}}}{2}-i(a+bi)^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

De drie oplossingen zijn dus:

$(a+bi)^{\frac{1}{3}}$, $-\frac{(a+bi)^{\frac{1}{3}}}{2}+i(a+bi)^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}$ en $-\frac{(a+bi)^{\frac{1}{3}}}{2}-i(a+bi)^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}$

Als b = 0 krijgen we dus:

$a^{\frac{1}{3}}$, $-\frac{a^{\frac{1}{3}}}{2}+ia^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}$ en $-\frac{a^{\frac{1}{3}}}{2}-ia^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}$

ofwel:

$\sqrt[3]{a}$, $-\frac{\sqrt[3]{a}}{2}+i\sqrt[3]{a}\frac{\sqrt{3}}{2}$ en $-\frac{a^{\frac{1}{3}}}{2}-i\sqrt[3]{a}\frac{\sqrt{3}}{2}$

1.2. Vereenvoudigen van derdemacht wortels

We willen dus eigenlijk $\sqrt[3]{p+qi}$ herschrijven naar iets met $a+bi$

Er geldt algemeen

$(a+bi)^3 \quad = a^3 - 3ab^2 + I(3a^2b - b^3)$

Er moet dus gelden:

$a^3 - 3ab^2 \quad = p$

En dus:

b = $\pm\sqrt{\frac{a^3 - p}{3a}}$

Tevens moet dan ook gelden:

$3a^2b - b^3 \quad = b(3a^2 - b^2) = q$

Als er een ‘mooie’ oplossing is dan moet a een deler zijn van p.

De methode is dus om alle delers (zowel positief als negatief) van ‘a’ in te vullen en te controleren of deze voldoet aan de voorwaarden.

2. Uitgeschreven stappen

2.1.

$$\left(y-\frac{b}{3a}\right)^2 = \left(y-\frac{b}{3a}\right)\left(y-\frac{b}{3a}\right)$$
$$= y^2-\frac{2b}{3a}y+\frac{b^2}{9a^2}$$

Als we hebben

(a – b)(c – d) = ac – ad – bc + bd

Neem maar bijvoorbeeld:

(5 – 2)(4 – 3) = 5·4 – 5·3 – 2·4 + 2·3
= 20 – 15 – 8 + 6
= 5 – 8 + 6
= -3 + 6
= 3

En inderdaad (5 – 2)(4 – 3) = 3·1 = 3

Nu hetzelfde doen maar dan met:

$$\left(y-\frac{b}{3a}\right)\left(y-\frac{b}{3a}\right) = yy-y\frac{b}{3a}-\frac{b}{3a}y+\frac{b}{3a}\frac{b}{3a}$$

Nu geldt dat yy = y^2

$$-y\frac{b}{3a}-\frac{b}{3a}y = -y\left(\frac{b}{3a}+\frac{b}{3a}\right)$$
$$= -y2\frac{b}{3a} \qquad \text{(omdat t + t = 2t)}$$
$$= -y\frac{2b}{3a} \qquad \text{(omdat } a\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}\text{)}$$

En het laatste deel:

$$\frac{b}{3a}\frac{b}{3a} = \frac{bb}{3a3a}$$
$$= \frac{b^2}{3\cdot 3aa}$$
$$= \frac{b^2}{9a^2}$$

Dus alles tezamen geeft dit nu:

$$\left(y-\frac{b}{3a}\right)\left(y-\frac{b}{3a}\right)= y^2-\frac{2b}{3a}y+\frac{b^2}{9a^2}$$

2.2.

Deze bijlage behandeld de stappen die genomen zijn om van $\left(y-\frac{b}{3a}\right)^3$ naar $y^3-\frac{b}{a}y^2+\frac{b^2}{3a^2}y-\frac{b^3}{27a^3}$ te komen. Hieronder een tabel, links steeds de stap, rechts staat vermeld wat er eigenlijk gedaan is.

$\left(y-\frac{b}{3a}\right)\left(y-\frac{b}{3a}\right)^2$	uit de algemene regel van $a^3 = a \cdot a \cdot a = a \cdot a^2$
$\left(y-\frac{b}{3a}\right)\left(y^2-\frac{2b}{3a}y+\frac{b^2}{9a^2}\right)$	$\left(y-\frac{b}{3a}\right)^2$ vervangen door $\left(y^2-\frac{2b}{3a}y+\frac{b^2}{9a^2}\right)$ dit hadden we reeds behandeld in bijlage 1.
$y^3-\frac{2b}{3a}y^2+\frac{b^2}{9a^2}y-\frac{b}{3a}y^2+\frac{2b^2}{9a^2}y-\frac{b^3}{27a^3}$	van de algemene regel: (a – b)(c – d + e) = ac – ad + ae – bc + bd – be (zie ook uitwerking 1)
$y^3-\frac{2b}{3a}y^2-\frac{b}{3a}y^2+\frac{b^2}{9a^2}y+\frac{2b^2}{9a^2}y-\frac{b^3}{27a^3}$	Hier is alleen de volgorde veranderd, zodanig dat alle y^2 en y'tjes bijelkaar staan
$y^3-\frac{3b}{3a}y^2+\frac{3b^2}{9a^2}y-\frac{b^3}{27a^3}$	Een vereenvoudiging (zie ook uitwerking 2)
$y^3-\frac{b}{a}y^2+\frac{b^2}{3a^2}y-\frac{b^3}{27a^3}$	Een vereenvoudiging (zie ook uitwerking 3)

Uitwerking 1

$$\left(y-\frac{b}{3a}\right)\left(y^2-\frac{2b}{3a}y+\frac{b^2}{9a^2}\right)= yy^2-\frac{2b}{3a}yy+\frac{b^2}{9a^2}y-\frac{b}{3a}y^2+\frac{b}{3a}\frac{2b}{3a}y-\frac{b}{3a}\frac{b^2}{9a^2}$$

Verder geldt nu dat:

$$yy^2=y^3$$

$$\frac{2b}{3a}yy=\frac{2b}{3a}y^2$$

$$\frac{b}{3a}\frac{2b}{3a}y=\frac{2bb}{3a3a}y=\frac{2b^b}{3\cdot 3aa}y=\frac{2b^b}{9a^2}y$$

$$\frac{b}{3a}\frac{b^2}{9a^2}=\frac{bb^2}{3a9a^2}=\frac{b^3}{3\cdot 9aa^2}=\frac{b^3}{27a^3}$$

Dit alles tezamen geeft inderdaad het resultaat.

Uitwerking 2

$$-\frac{2b}{3a}y^2-\frac{b}{3a}y^2=\left(-\frac{2b}{3a}-\frac{b}{3a}\right)y^2=-\frac{2b-b}{3a}y^2=-\frac{b}{3a}y^2$$

$$\frac{b^2}{9a^2}y+\frac{2b^2}{9a^2}y=\left(\frac{b^2}{9a^2}+\frac{2b^2}{9a^2}\right)y=\frac{b^2+2b^2}{9a^2}y=\frac{3b^2}{9a^2}y$$

Uitwerking 3

In deze laatste stap is een vereenvoudiging van de vorige stap:

$$\frac{3b}{3a}=\frac{3}{3}\frac{b}{a}=1\cdot\frac{b}{a}=\frac{b}{a}$$

$$\frac{3b^2}{9a^2}=\frac{3}{9}\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}\frac{b^2}{a^2}=\frac{1b^2}{3a^2}=\frac{b^2}{3a^2}$$

2.3.

$$ay^3 - a\frac{b}{a}y^2 + a\frac{b^2}{3a^2}y - a\frac{b^3}{27a^3} + by^2 - b\frac{2b}{3a}y + b\frac{b^2}{9a^2} + cy - \frac{cb}{3a} + d = 0$$

Hier is het resultaat uit bijlage 1 en 2, ingevoerd in de algemene vergelijking

$$ay^3 - by^2 + \frac{ab^2}{3a^2}y - \frac{ab^3}{27a^3} + by^2 - \frac{2b^2}{3a}y + \frac{b^3}{9a^2} + cy - \frac{cb}{3a} + d$$

Hier is alles vermenigvuldigd met de bijbehorende coëfficiënt. $a\frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$.

Verder is meteen $a\frac{b}{a}y^2$ vereenvoudigd omdat: $a\frac{b}{a} = \frac{ab}{a} = \frac{a}{a}b = 1b = b$

$$ay^3 - by^2 + \frac{b^2}{3a}y - \frac{b^3}{27a^2} + by^2 - \frac{2b^2}{3a}y + \frac{b^3}{9a^2} + cy - \frac{cb}{3a} + d = 0$$

Hier zijn de volgende vereenvoudigingen toegepast:

$$\frac{ab^2}{3a^2} = \frac{ab^2}{3aa} = \frac{a}{a}\frac{b^2}{3a} = 1\frac{b^2}{3a} = \frac{b^2}{3a}$$

$$\frac{ab^3}{27a^3} = \frac{a}{a}\frac{b^3}{27a^2} = 1\frac{b^3}{27a^2} = \frac{b^3}{27a^2}$$

2.4.

$y^3 + py + q \quad = (u-v)^3 + 3uv(u-v) + q$

Alles uitvermenigvuldigen:

$$\begin{aligned}(u-v)^3 &= (u-v)(u-v)^2 \\ &= (u-v)(u^2 - 2uv + v^2) \\ &= u^3 - 2u^2v - uv^2 - vu^2 + 2uv^2 - v^3 \\ &= u^3 - 3u^2v + uv^2 - v^3\end{aligned}$$

en:

$$3uv(u-v) \quad = 3u^2v - 3uv^2$$

Dit tezamen geeft:

$$u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + 3u^2v - 3uv^2 + q$$

en omdat: $-3u^2v + 3u^2v = 0$ en $3uv^2 - 3uv^2 = 0$ blijft er over

$$u^3 - v^3 + q$$

2.5.

In deze bijlage de stappen van $\dfrac{\dfrac{2b^3}{27a^2}-\dfrac{cb}{3a}+d}{a} = \dfrac{2b^3-9acb+27da^2}{27a^3}$

$\dfrac{\dfrac{2b^3}{27a^2}-\dfrac{cb}{3a}+d}{a}$	Eerst opsplitsen geeft:
$=\dfrac{\dfrac{2b^3}{27a^2}}{a}-\dfrac{\dfrac{cb}{3a}}{a}+\dfrac{d}{a}$	Gebruik maken van $\dfrac{\dfrac{a}{b}}{c}=\dfrac{a}{bc}$ geeft:
$=\dfrac{2b^3}{27a^3}-\dfrac{cb}{3a^2}+\dfrac{d}{a}$	Noemers gelijknamig maken via $\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{c}$ geeft.
$=\dfrac{2b^3}{27a^3}-\dfrac{cb}{3a^2}\cdot\dfrac{9a}{9a}+\dfrac{d}{a}\cdot\dfrac{27a^2}{27a^2}$	Uitwerken geeft:
$=\dfrac{2b^3}{27a^3}-\dfrac{9acb}{27a^3}+\dfrac{27da^2}{27a^3}$	Terug onder een noemer geeft:
$=\dfrac{2b^3-9acb+27da^2}{27a^3}$	

2.6.

In deze bijlage de stappen van $\dfrac{\left(\dfrac{c-\dfrac{b^2}{3a}}{a}\right)^3}{27} = \dfrac{(3ca-b^2)^3}{729a^6}$.

$\dfrac{\left(\dfrac{c-\dfrac{b^2}{3a}}{a}\right)^3}{27}$	Maak gebruik van $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3 = \dfrac{a^3}{b^3}$
$= \dfrac{\dfrac{\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)^3}{a^3}}{27}$	Gebruik maken van $\dfrac{\dfrac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{bc}$ geeft:
$= \dfrac{\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)^3}{27a^3}$	$\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)^3$ voluit schrijven geeft:
$= \dfrac{c^3 - \dfrac{c^2b^2}{a} + \dfrac{cb^4}{3a^2} - \dfrac{b^6}{27a^3}}{27a^3}$	
$= \dfrac{c^3 - \dfrac{c^2b^2}{a} + \dfrac{cb^4}{3a^2} - \dfrac{b^6}{27a^3}}{27a^3} \cdot \dfrac{27a^3}{27a^3}$	Noemers in de teller wegwerken via $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{c}$
$= \dfrac{27c^3a^3 - 27a^2c^2b^2 + 9acb^4 - b^6}{729a^6}$.	Teller ontbinden in factoren geeft:
$= \dfrac{(3ca-b^2)^3}{729a^6}$.	

2.7.

In deze bijlage de stappen van

$$\sqrt{\frac{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}{27a^4}}=\pm\frac{1}{a^2}\frac{1}{9}\sqrt{3}\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}$$

$\sqrt{\frac{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}{27a^4}}$	Maak gebruik van $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$
$=\sqrt{\frac{1}{27}}\sqrt{\frac{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}{a^4}}$	Maak gebruik van $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
$=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9\cdot 3}}\sqrt{\frac{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}{a^4}}$	Opnieuw $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ en $\sqrt{9}=3$
$=\frac{1}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}{a^4}}$	Wortel in noemer weg via $\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{c}$
$=\frac{1\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\sqrt{3}}\sqrt{\frac{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}{a^4}}$	$\sqrt{a}\sqrt{a}=a$ geeft dus:
$=\frac{1}{9}\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{a^4}\cdot\left(4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a\right)}$	Nu hetzelfde verhaal maar met a^4
$=\frac{1}{9}\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{a^4}}\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}$	
$=\pm\frac{1}{a^2}\frac{1}{9}\sqrt{3}\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}$	

2.8.

In deze bijlage de stappen van

$$\frac{-\frac{2b^3-9acb+27da^2}{27a^3} \pm \pm \frac{1}{a^2}\frac{1}{9}\sqrt{3}\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}}{2} = \frac{-2b^3+9acb-27da^2 \pm 3a\sqrt{3}\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}}{54a^3}$$

$\frac{-\frac{2b^3-9acb+27da^2}{27a^3} \pm \pm \frac{1}{a^2}\frac{1}{9}\sqrt{3}\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}}{2}$	Maak gebruik van $\pm\pm=\pm$
$=\frac{-\frac{2b^3-9acb+27da^2}{27a^3} \pm \frac{1}{9a^2}\sqrt{3}\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}}{2}$	Opsplitsen geeft:
$=\frac{-\frac{2b^3-9acb+27da^2}{27a^3}}{2} \pm \frac{\frac{1}{9a^2}\sqrt{3}\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}}{2}$	Gebruik maken van $\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{bc}$ geeft:
$=-\frac{2b^3-9acb+27da^2}{54a^3} \pm \frac{\sqrt{3}\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}}{18a^2}$	Noemers gelijknamig maken via $\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{c}$
$=-\frac{2b^3-9acb+27da^2}{54a^3} \pm \frac{\sqrt{3}\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}}{18a^2}\cdot\frac{3a}{3a}$	Uitwerken:
$=-\frac{2b^3-9acb+27da^2}{54a^3} \pm \frac{3a\sqrt{3}\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}}{54a^3}$	Weer samenvoegen omdat $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$
$=-\frac{2b^3-9acb+27da^2 \pm 3a\sqrt{3}\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}}{54a^3}$	De – voor de breuk wegwerken geeft:
$=\frac{-2b^3+9acb-27da^2 \pm 3a\sqrt{3}\sqrt{4b^3d-c^2b^2-18cbad+27d^2a^2+4c^3a}}{54a^3}$	

2.9.

In deze bijlage de stappen van $\frac{p}{3u} = \frac{18ac-6b^2}{at\sqrt[3]{2916}}$

$\frac{p}{3u}$	
$= \frac{\frac{c-\frac{b^2}{3a}}{a}}{3\cdot\frac{t\sqrt[3]{2916}}{54a}}$	Gebruik maken van $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$ geeft:
$= \frac{\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)54a}{3at\sqrt[3]{2916}}$	Vereenvoudigen
$= \frac{\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)18}{t\sqrt[3]{2916}}$	Haakjes wegwerken
$= \frac{18c-\frac{18b^2}{3a}}{t\sqrt[3]{2916}}$	Vereenvoudigen
$= \frac{18c-\frac{6b^2}{a}}{t\sqrt[3]{2916}}$	Noemers gelijk maken
$= \frac{\frac{18ac-6b^2}{a}}{t\sqrt[3]{2916}}$	Gebruik maken van $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$ geeft:
$= \frac{18ac-6b^2}{at\sqrt[3]{2916}}$	

3. Een uitgewerkte voorbeelden

3.1. 'Beknopt' Voorbeeld 1

Neem de vergelijking:

$2x^3 + 6x^2 - 20x - 48 = 0$

ofwel:

a = 2
b = 6
c = -20
d = -48

Stap 1. Bereken p en q, met $\frac{c - \frac{b^2}{3a}}{a} = p$ en $\frac{\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{cb}{3a} + d}{a} = q$

$$p = \frac{-20 - \frac{6^2}{3 \cdot 2}}{2} = -13$$

$$q \frac{\frac{2 \cdot 6^3}{27 \cdot 2^2} - \frac{-20 \cdot 6}{3 \cdot 2} - 48}{2} = -12$$

Stap 2: Bereken g door $g^2 + qg - \frac{p^3}{27}$

0 = $g^2 - 12g - \frac{(-13)^3}{27} = g^2 - 12g + \frac{13^3}{27}$

geeft:

a = 1
b = -12
c = $\frac{2197}{27}$

Invullen in de abcD-formule:

$$g = \frac{12 + \sqrt{144 - 4 \cdot \frac{2197}{27}}}{2} \quad \text{en} \quad g = \frac{12 - \sqrt{144 - 4 \cdot \frac{2197}{27}}}{2}$$

Met complexe getallen theorie levert dit op:

$$g = 6 + \frac{35}{9} i\sqrt{3} \quad \text{en} \quad g = 6 - \frac{35}{9} i\sqrt{3}$$

Stap 3: Bereken u door middel van: u = $\sqrt[3]{g}$

Ofwel:

$$u = \sqrt[3]{6 + \frac{35}{9} i\sqrt{3}} \qquad \text{en} \qquad u = \sqrt[3]{6 - \frac{35}{9} i\sqrt{3}}$$

We werken nog steeds in de complexe getallen theorie, dus beide geven drie oplossingen:

$$\begin{aligned} u &= 2 + \frac{1}{3} i\sqrt{3} \quad \text{of} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{7}{6} i\sqrt{3} \quad \text{of} \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{5}{6} i\sqrt{3} \quad \text{of} \\ &= 2 - \frac{1}{3} i\sqrt{3} \quad \text{of} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{7}{6} i\sqrt{3} \quad \text{of} \\ &= -\frac{3}{2} - \frac{5}{6} i\sqrt{3} \end{aligned}$$

(zie ook bijlage 1)

Stap 4: Bereken v met $v = \frac{p}{3u}$

u	v
$2+\frac{1}{3}i\sqrt{3}$	$-13\,\frac{1}{6+I\sqrt{3}}$
$-\frac{1}{2}-\frac{7}{6}i\sqrt{3}$	$26\,\frac{1}{3+7\,I\sqrt{3}}$
$-\frac{3}{2}+\frac{5}{6}i\sqrt{3}$	$-26\,\frac{1}{-9+5\,I\sqrt{3}}$
$2-\frac{1}{3}i\sqrt{3}$	$13\,\frac{1}{-6+I\sqrt{3}}$
$-\frac{3}{2}-\frac{5}{6}i\sqrt{3}$	$26\,\frac{1}{9+5\,I\sqrt{3}}$
$-\frac{1}{2}+\frac{7}{6}i\sqrt{3}$	$-26\,\frac{1}{-3+7\,I\sqrt{3}}$

Stap 5: Bereken y met y = u – v

u	v	y = u – v
$2+\frac{1}{3}i\sqrt{3}$	$-13\,\frac{1}{6+I\sqrt{3}}$	4
$-\frac{1}{2}-\frac{7}{6}i\sqrt{3}$	$26\,\frac{1}{3+7\,I\sqrt{3}}$	-1
$-\frac{3}{2}+\frac{5}{6}i\sqrt{3}$	$-26\,\frac{1}{-9+5\,I\sqrt{3}}$	-3
$2-\frac{1}{3}i\sqrt{3}$	$13\,\frac{1}{-6+I\sqrt{3}}$	4
$-\frac{3}{2}-\frac{5}{6}i\sqrt{3}$	$26\,\frac{1}{9+5\,I\sqrt{3}}$	-3
$-\frac{1}{2}+\frac{7}{6}i\sqrt{3}$	$-26\,\frac{1}{-3+7\,I\sqrt{3}}$	-1

Stap 6: Bereken x met x = y – $\frac{b}{3a}$

x = y – $\frac{6}{3 \cdot 2}$

y	x
4	3
-1	-2
-3	-4

3.2. Voorbeeld 2

$7x^3 - 14x^2 - 161x + 420 = 0$

a = 7, b = -14, c = -161, d = 420

1. Bereken *p* en *q*, met $\dfrac{c - \dfrac{b^2}{3a}}{a} = p$ en $\dfrac{\dfrac{2b^3}{27a^2} - \dfrac{cb}{3a} + d}{a} = q$

$$p = \frac{-161 - \dfrac{(-14)^2}{3 \cdot 7}}{7}$$

$$= \frac{-73}{3}$$

$$q = \frac{\dfrac{2(-14)^3}{27 \cdot 7^2} - \dfrac{-161(-14)}{3 \cdot 7} + 420}{7}$$

$$= \frac{1190}{27}$$

2. Bereken *g* door $g^2 + qg - \dfrac{p^3}{27}$ op te lossen met de abcD-formule (zal 0, 1 of 2 antwoorden geven).

$$g = \frac{-q + \sqrt{q^2 - 4\left(\dfrac{-p^3}{27}\right)}}{2}$$

$$= \frac{-\dfrac{1190}{27} + \sqrt{\left(\dfrac{1190}{27}\right)^2 - 4\left(\dfrac{-\left(\dfrac{-73}{3}\right)^3}{27}\right)}}{2}$$

$$= \frac{-595}{27} + 4i\sqrt{3}$$

3. Bereken *u* door middel van: $u = \sqrt[3]{g}$ (zal 3 antwoorden opleveren)

u $= \sqrt[3]{\dfrac{-595}{27} + 4i\sqrt{3}}$

$= \dfrac{5}{3} + \dfrac{4}{3}i\sqrt{3}$

4. Bereken *v* met $v = \dfrac{p}{3u}$

v $= \dfrac{\dfrac{-73}{3}}{3\left(\dfrac{5}{3} + \dfrac{4}{3}i\sqrt{3}\right)}$

$= \dfrac{-73}{9\left(\dfrac{5}{3} + \dfrac{4}{3}i\sqrt{3}\right)}$

5. Bereken *y* met *y* = *u* – *v*

y $= \dfrac{5}{3} + \dfrac{4}{3}i\sqrt{3} - \dfrac{-73}{9\left(\dfrac{5}{3} + \dfrac{4}{3}i\sqrt{3}\right)}$

$= \dfrac{5}{3} + \dfrac{4}{3}i\sqrt{3} + \dfrac{73}{9\left(\dfrac{5}{3} + \dfrac{4}{3}i\sqrt{3}\right)}$

$= \dfrac{5 + 4i\sqrt{3}}{3} + \dfrac{73}{3\left(5 + 4i\sqrt{3}\right)}$

$= \dfrac{\left(5 + 4i\sqrt{3}\right)^2}{3\left(5 + 4i\sqrt{3}\right)} + \dfrac{73}{3\left(5 + 4i\sqrt{3}\right)}$

$= \dfrac{-23 + 40i\sqrt{3}}{3\left(5 + 4i\sqrt{3}\right)} + \dfrac{73}{3\left(5 + 4i\sqrt{3}\right)}$

$$= \frac{-23 + 40i\sqrt{3} + 73}{3\left(5 + 4i\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{50 + 40i\sqrt{3}}{3\left(5 + 4i\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{10\left(5 + 4i\sqrt{3}\right)}{3\left(5 + 4i\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{10}{3}$$

6. Bereken x met $x = y - \frac{b}{3a}$

$$x = \frac{10}{3} - \frac{-14}{3 \cdot 7}$$

$$= \frac{10}{3} + \frac{2}{3}$$

$$= 4$$

Controle:

$$7x^3 - 14x^2 - 161x + 420 = 0$$

$$7 \cdot 4^3 - 14 \cdot 4^2 - 161 \cdot 4 + 420 = 0$$

$$448 - 224 - 644 + 420 = 0$$

KLOPT

De tweede oplossing:

$$u = \frac{-\sqrt[3]{\frac{-595}{27}+4i\sqrt{3}}}{2} + i\sqrt{3}\,\frac{\sqrt[3]{\frac{-595}{27}+4i\sqrt{3}}}{2}$$

$$= \frac{-\frac{5}{3}-\frac{4}{3}i\sqrt{3}}{2} + i\sqrt{3}\,\frac{\frac{5}{3}+\frac{4}{3}i\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{5}{6}-\frac{4}{6}i\sqrt{3}+i\sqrt{3}\left(\frac{5}{6}+\frac{4}{6}i\sqrt{3}\right)$$

$$= -\frac{5}{6}-\frac{4}{6}i\sqrt{3}+\frac{5}{6}i\sqrt{3}+\frac{4}{6}i\sqrt{3}i\sqrt{3}$$

$$= -\frac{5}{6}+\frac{1}{6}i\sqrt{3}-\frac{12}{6}$$

$$= -\frac{17}{6}+\frac{1}{6}i\sqrt{3}$$

4. Bereken *v* met $v = \frac{p}{3u}$

$$v = \frac{\frac{-73}{3}}{3\left(-\frac{17}{6}+\frac{1}{6}i\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{-73}{9\left(-\frac{17}{6}+\frac{1}{6}i\sqrt{3}\right)}$$

5. Bereken *y* met $y = u - v$

$$y = -\frac{17}{6}+\frac{1}{6}i\sqrt{3}-\frac{-73}{9\left(-\frac{17}{6}+\frac{1}{6}i\sqrt{3}\right)}$$

$$= -\frac{17}{6}+\frac{1}{6}i\sqrt{3}+\frac{73}{9\left(-\frac{17}{6}+\frac{1}{6}i\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{-17+i\sqrt{3}}{6}+\frac{73}{9\left(-\frac{17+i\sqrt{3}}{6}\right)}$$

$$= \frac{-17+i\sqrt{3}}{6}+\frac{73}{\frac{-51+i3\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{-17+i\sqrt{3}}{6}+\frac{146}{-51+i3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-17+i\sqrt{3}}{6}+\frac{146}{3\left(-17+i\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{\left(-17+i\sqrt{3}\right)^2}{6\left(-17+i\sqrt{3}\right)}+\frac{146}{3\left(-17+i\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{286-34i\sqrt{3}}{6\left(-17+i\sqrt{3}\right)}+\frac{292}{6\left(-17+i\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{286-34i\sqrt{3}+292}{6\left(-17+i\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{578-34i\sqrt{3}}{6\left(-17+i\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{-34\left(-17+2i\sqrt{3}\right)}{6\left(-17+i\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{-17}{3}$$

6. Bereken x met $x = y - \frac{b}{3a}$

$$x = \frac{-17}{3} - \frac{-14}{3 \cdot 7}$$

$$= \frac{-17}{3} + \frac{2}{3}$$

= -5

Controle:

$$7x^3 - 14x^2 - 161x + 420 = 0$$

$$7 \cdot (-5)^3 - 14 \cdot (-5)^2 - 161 \cdot (-5) + 420 = 0$$

$$-875 - 350 + 805 + 420 = 0$$

KLOPT

De derde oplossing
De tweede oplossing:

$$u = \frac{-\sqrt[3]{\frac{-595}{27}+4i\sqrt{3}}}{2} - i\sqrt{3}\,\frac{\sqrt[3]{\frac{-595}{27}+4i\sqrt{3}}}{2}$$

$$= \frac{-\frac{5}{3}-\frac{4}{3}i\sqrt{3}}{2} - i\sqrt{3}\,\frac{\frac{5}{3}+\frac{4}{3}i\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{5}{6}-\frac{4}{6}i\sqrt{3} - i\sqrt{3}\left(\frac{5}{6}+\frac{4}{6}i\sqrt{3}\right)$$

$$= -\frac{5}{6}-\frac{4}{6}i\sqrt{3}-\frac{5}{6}i\sqrt{3}-\frac{4}{6}i\sqrt{3}i\sqrt{3}$$

$$= -\frac{5}{6}-\frac{9}{6}i\sqrt{3}+\frac{12}{6}$$

$$= \frac{7}{6}-\frac{9}{6}i\sqrt{3}$$

7. Bereken *v* met $v = \frac{p}{3u}$

$$v = \frac{\frac{-73}{3}}{3\left(\frac{7}{6}-\frac{9}{6}i\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{-73}{9\left(\frac{7}{6}-\frac{9}{6}i\sqrt{3}\right)}$$

8. Bereken *y* met *y* = *u* – *v*

y $= \frac{7}{6} - \frac{9}{6} i\sqrt{3} - \frac{-73}{9\left(\frac{7}{6} - \frac{9}{6} i\sqrt{3}\right)}$

$= \frac{7}{6} - \frac{9}{6} i\sqrt{3} + \frac{73}{9\left(\frac{7}{6} - \frac{9}{6} i\sqrt{3}\right)}$

$= \frac{7 - 9i\sqrt{3}}{6} + \frac{73}{\frac{21 - 27i\sqrt{3}}{2}}$

$= \frac{7 - 9i\sqrt{3}}{6} + \frac{146}{21 - 27i\sqrt{3}}$

$= \frac{7 - 9i\sqrt{3}}{6} + \frac{146}{3\left(7 - 9i\sqrt{3}\right)}$

$= \frac{\left(7 - 9i\sqrt{3}\right)^2}{6\left(7 - 9i\sqrt{3}\right)} + \frac{146}{3\left(7 - 9i\sqrt{3}\right)}$

$= \frac{-194 - 126\sqrt{3}}{6\left(7 - 9i\sqrt{3}\right)} + \frac{146}{3\left(7 - 9i\sqrt{3}\right)}$

$= \frac{-194 - 126\sqrt{3}}{6\left(7 - 9i\sqrt{3}\right)} + \frac{292}{6\left(7 - 9i\sqrt{3}\right)}$

$= \frac{-194 - 126\sqrt{3} + 292}{6\left(7 - 9i\sqrt{3}\right)}$

$= \frac{98 - 126\sqrt{3}}{6\left(7 - 9i\sqrt{3}\right)}$

$= \frac{14\left(7 - 9\sqrt{3}\right)}{6\left(7 - 9i\sqrt{3}\right)} \qquad = \frac{7}{3}$

9. Bereken x met $x = y - \frac{b}{3a}$

$x \quad = \frac{7}{3} - \frac{-14}{3 \cdot 7}$

$= \frac{7}{3} + \frac{2}{3}$

$= 3$

Controle:

$7x^3 - 14x^2 - 161x + 420 = 0$

$7 \cdot 3^3 - 14 \cdot 3^2 - 161 \cdot 3 + 420 = 0$

$189 - 126 - 483 + 420 = 0$

KLOPT

Bewijs dat:

$$\sqrt[3]{\frac{-595}{27}+4i\sqrt{3}} = \frac{5}{3}+\frac{4}{3}i\sqrt{3} = \frac{5+4i\sqrt{3}}{3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{-595}{27}+4i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\frac{-595}{27}+\frac{4\cdot 27i\sqrt{3}}{27}}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{-595+4\cdot 27i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{-595+108i\sqrt{3}}$$

En rest er nog:

$$\sqrt[3]{-595+108i\sqrt{3}} = 5+4i\sqrt{3}$$

$$(a+bi)^3 = a^3-3ab^2+I\left(3a^2b-b^3\right)$$

Er moet dus gelden:

a^3-3ab^2 = -595

$3a^2b-b^3 = b\left(3a^2-b^2\right) = 108\sqrt{3}$

Laten we $b=t\sqrt{3}$

En dus:

a^3-3ab^2 = -595 => $a^3-3a\left(t\sqrt{3}\right)^2 = a^3-9at^2$ = -595

en

$b\left(3a^2-b^2\right) = t\sqrt{3}\left(3a^2-3t^2\right) = 108\sqrt{3}$

Ofwel

$t\left(a^2-t^2\right) = 36$

Als er een ‘mooie’ oplossing is dan moet a een deler zijn van 595, en dus:
a = 1, -1, 5, -5, 7, -7, 17, -17, 595 of -595

Als a = 1

$a^3 - 9at^2$ = -595

$1 - 9t^2$ = -595

$t^2 = \frac{594}{9}$

$t = \pm\sqrt{66}$

maar:

$t(a^2 - t^2) = \sqrt{66}(1 - 66)$

$= \sqrt{66} - 66\sqrt{66}$

KLOPT NIET MET $t(a^2 - t^2) = 36$

Als a = -1

$a^3 - 9at^2$ = -595

$-1 + 9t^2$ = -595

$t^2 = -66$

$t = \sqrt{-66}$

maar:

$t(a^2 - t^2) = \sqrt{-66}(1 + 66)$

$= \sqrt{-66} + 66\sqrt{-66}$

KLOPT NIET MET $t(a^2 - t^2) = 36$

Als a = 5

$a^3 - 9at^2$ = -595

$125 - 45t^2$ = -595

t^2 = 16

t = $\pm\sqrt{16}$
= 4 of -4

als t = 4 dan:

$t\left(a^2 - t^2\right)$ = $4(25 - 16)$

= $100 - 64$

KLOPT MET $t\left(a^2 - t^2\right)$ = 36