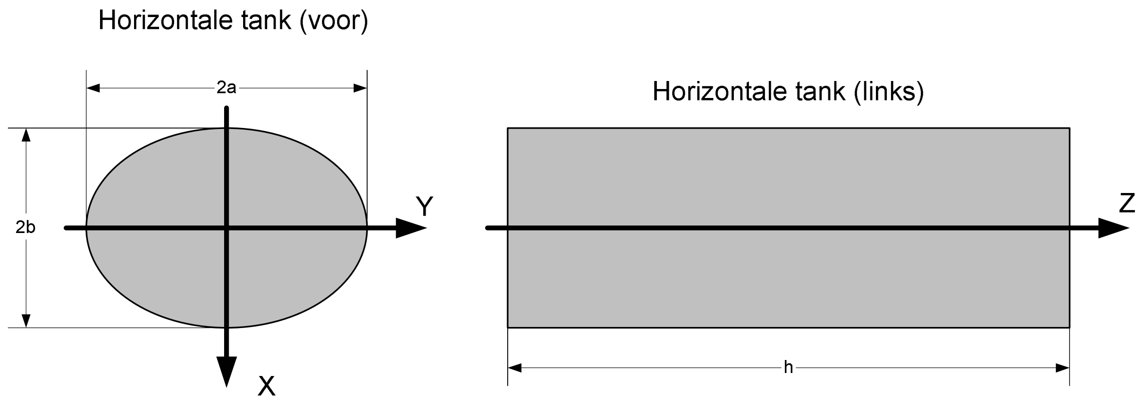
1 Inleiding

2 Basisafmetingen

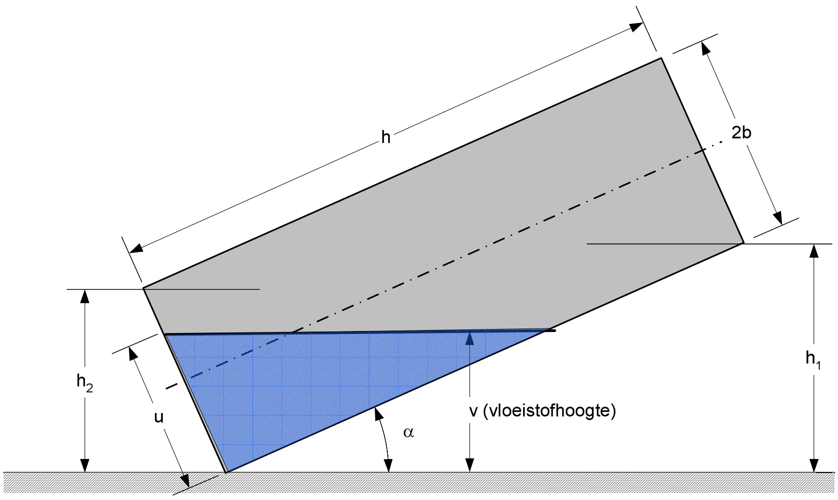
In Figuur 1 stellen we de tank voor en definiëren we de basisafmetingen en het assenstelsel.



Figuur 1 Basisafmetingen en keuze assenstelsel

3 Gevallenstudie

In functie van de basisafmetingen, de kantelhoek en het vloeistofniveau kunnen we een aantal gevallen onderscheiden. Bij elk van de hierna volgende figuren gebruiken we de afmetingen zoals in Figuur 2 gedefinieerd. Waar nodig herhalen we deze of definiëren we bijkomende afmetingen.



Figuur 2 Benoeming van de maten

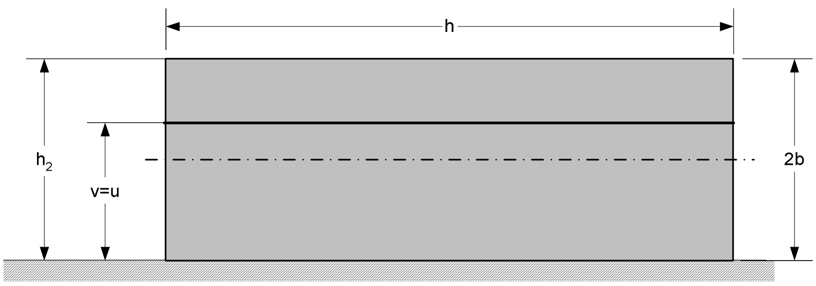
De afgeleide afmetingen kunnen we als volgt berekenen:

$$h_1 = h\sin(\alpha)$$

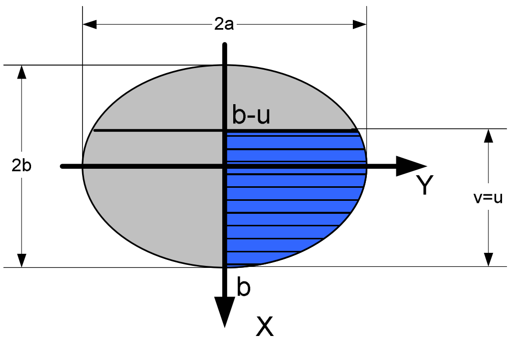
$$h_2 = 2b\cos(\alpha)$$

$$u = \frac{v}{\cos(\alpha)}$$

3.1 Geval 1



Figuur 3 Geval 1



Figuur 4 Detail grondvlak

Het grondvlak is bepaald door de ellips met vergelijking $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

Het gedeelte voor y>0 is begrensd door $y=a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}$.

Zodat $V_1(a,b,h,\alpha,v)=2.\int_{b-u}^{b} h.y.dx = 2ah\int_{b-u}^{b}\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}dx$

We substitueren $\frac{x}{b}=\cos(\theta)$ met $0\le\theta\le\pi$ en $\theta_0=\arccos\left(1-\frac{u}{b}\right)$.

Met deze keuze van θ_0 hebben we: $\cos(\theta_0)=\frac{b-u}{b}$ en $\sin(\theta_0)=\sqrt{1-\left(\frac{b-u}{b}\right)^2}=\frac{\sqrt{2bu-u^2}}{b}$.

Dan krijgen we:

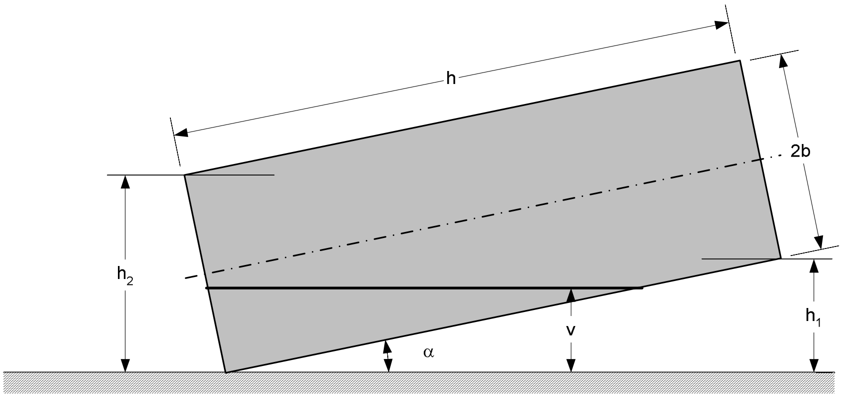
$$V_1(a,b,h,\alpha,v)=$$

$$-2abh\int_{\theta_0}^{0}\sin(\theta).\sin(\theta)d\theta = abh\int_{0}^{\theta_0}(1-\cos(2\theta))d\theta = abh\left(\theta_0-\int_{0}^{\theta_0}\cos(2\theta)d\theta\right)=$$

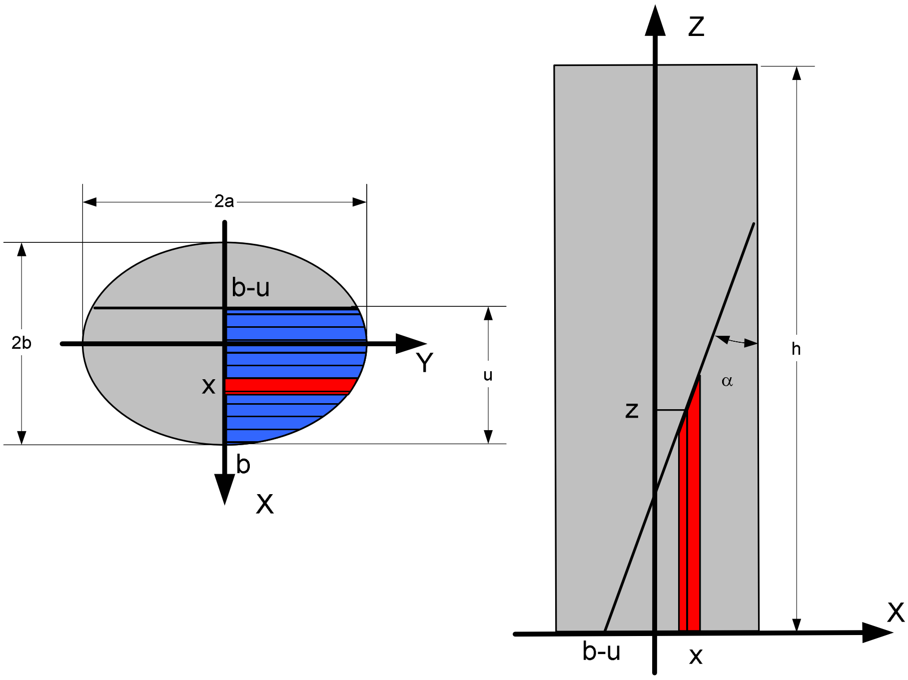
$$abh\left(\theta_0-\frac{1}{2}\sin(2\theta_0)\right)=abh(\theta_0-\sin(\theta_0).\cos(\theta_0))=$$

$$abh\left(\arccos\left(1-\frac{u}{b}\right)-\frac{b-u}{b^2}\sqrt{2bu-u^2}\right)$$

3.2 Geval 2



Figuur 5 Geval 2.1



Figuur 6 Detail grondvlak

Het grondvlak is bepaald door de ellips met vergelijking $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

Het gedeelte voor y>0 is begrensd door $y=a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}$.

Voor een bepaalde snede ter hoogte van x hebben we een constante waarde voor z:

$\frac{z}{x-(b-u)}=\cot(\alpha)$ en dus: $z=\cot(\alpha).(x-b+u)$.

De snede kan uitgedrukt worden als: $dV=2yzdx=2a.\cot(\alpha).(x-b+u)\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}$

Zodat:

$$V = 2a.\cot(\alpha).\int_{b-u}^{b}(x-b+u)\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}dx =$$

$$2a.\cot(\alpha).\left[\int_{b-u}^{b} x\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}dx + (u-b).\int_{b-u}^{b}\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}dx\right] =$$

$$2a.\cot(\alpha).\left[I_1 + (u-b).I_2\right]$$

We definiëren I_1 en I_2:

$$I_1 = \int_{b-u}^{b} x\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}dx \text{ en } I_2 = \int_{b-u}^{b}\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}dx$$

We substitueren $\frac{x}{b} = \cos(\theta)$ met $0 \le \theta \le \pi$ en $\theta_0 = \arccos\left(1-\frac{u}{b}\right)$.

Met deze keuze van θ_0 hebben we: $\cos(\theta_0) = \frac{b-u}{b}$ en $\sin(\theta_0) = \sqrt{1-\left(\frac{b-u}{b}\right)^2} = \frac{\sqrt{2bu-u^2}}{b}$.

Dan:

$$I_1 = -b^2\int_{\theta_0}^{0}\cos(\theta).\sin^2(\theta)d\theta \text{ en } I_2 = -b\int_{\theta_0}^{0}\sin^2(\theta)d\theta$$

$$I_1 = b^2\int_{0}^{\theta_0}\sin^2(\theta)d(\sin\theta) = b^2\left(\sin^3(\theta_0) - \int_{0}^{\theta_0}\sin(\theta)d(\sin^2\theta)\right) =$$

$$b^2\sin^3(\theta_0) - 2\int_{0}^{\theta_0}\sin^2(\theta)\cos(\theta)d\theta = b^2\sin^3(\theta_0) - 2I_1$$

En dus: $I_1 = \frac{1}{3}b^2\sin^3(\theta_0)$

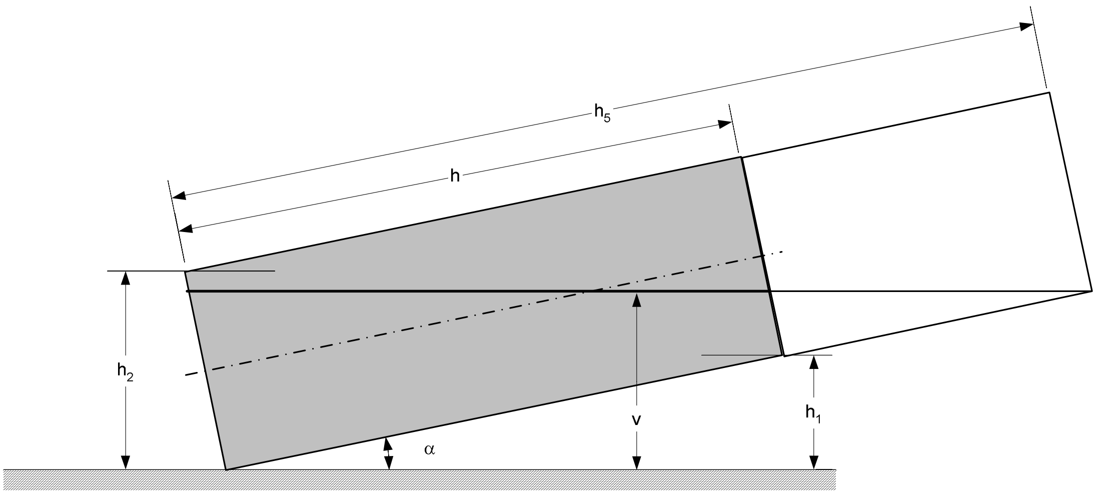
$$I_2 = b\int_{0}^{\theta_0}\sin^2(\theta)d\theta = \frac{b}{2}\int_{0}^{\theta_0}1-\cos(2\theta))d\theta = \frac{b}{2}\left(\theta_0 - \int_{0}^{\theta_0}\cos(2\theta))d\theta\right) = \frac{b}{2}\left(\theta_0 - \frac{1}{2}\sin(2\theta_0)\right)$$

Zodat:

$$V_{2.1}(a,b,h,\alpha,v) = 2a.\cot(\alpha).\left[\frac{1}{3}b^2\sin^3(\theta_0) + (u-b).\frac{b}{2}(\theta_0 - \sin(\theta_0)\cos(\theta_0))\right] =$$

$$\frac{a}{3}.\cot(\alpha).\left[2b^2\sin^3(\theta_0) + 3b(u-b)\theta_0 - 3b(u-b)\sin(\theta_0)\cos(\theta_0)\right] =$$

$$\frac{a}{3b}.\cot(\alpha).\left[2\left(2bu-u^2\right)^{\frac{3}{2}} + 3b^2(u-b)\arccos\left(1-\frac{u}{b}\right) + 3(u-b)^2\sqrt{2bu-u^2}\right]$$

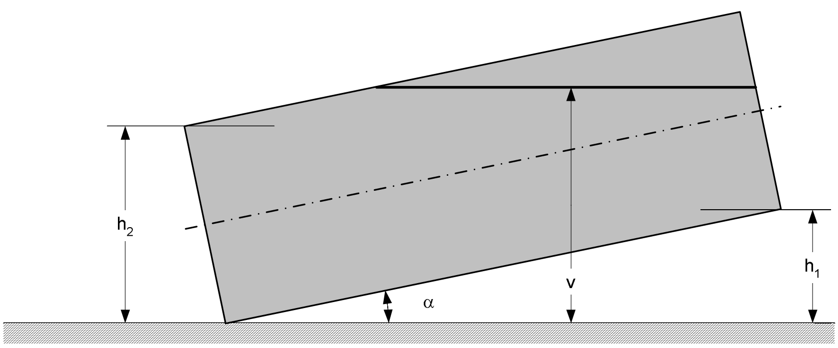


Figuur 7 Geval 2.2

We zien: $\frac{v}{h_5} = \sin(\alpha)$ en dus: $h_5 = \frac{v}{\sin(\alpha)}$.

We kunnen het gezochte volume uitdrukken als verschil van twee volumes van het type zoals beschreven in Geval 2.1:

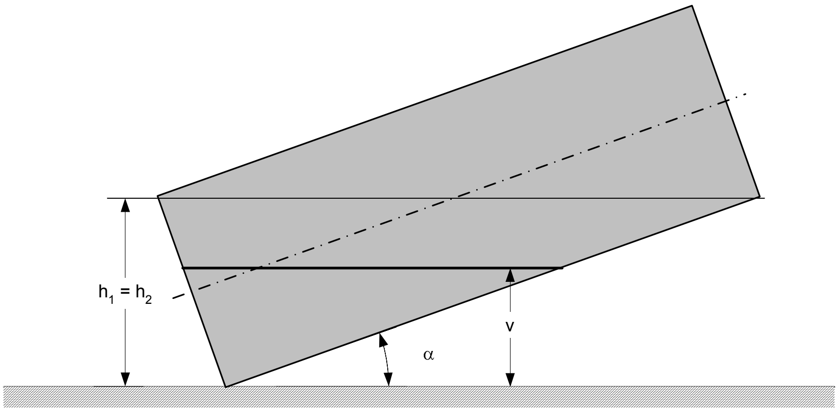
$V_{2.2}(a,b,h,\alpha,v) = V_{2.1}(a,b,h_5,\alpha,v) - V_{2.1}(a,b,h_5 - h,\alpha,v - h_1)$



Figuur 8 Geval 2.3

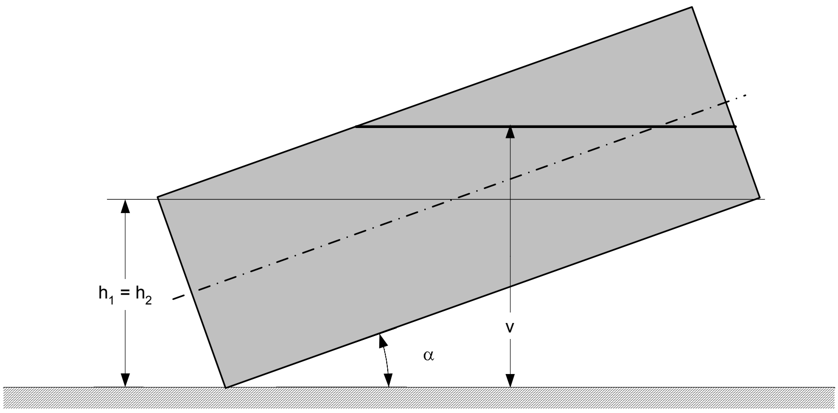
We kunnen dit volume zien als het verschil van een volledige cilinder met een volume van Geval 2.1: $V_{2.3}(a,b,h,\alpha,v) = \pi abh - V_{2.1}(a,b,h,\alpha,h_1 + h_2 - v)$

3.3 Geval 3



Figuur 9 Geval 3.1

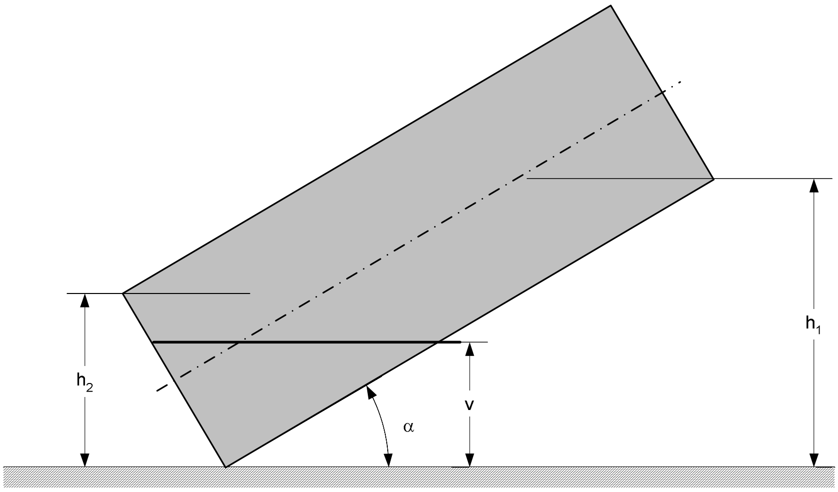
We kunnen dit volume zien als een variant van Geval 2.1: $V_{3.1}(a,b,h,\alpha,v)=V_{2.1}(a,b,h,\alpha,v)$



Figuur 10 Geval 3.2

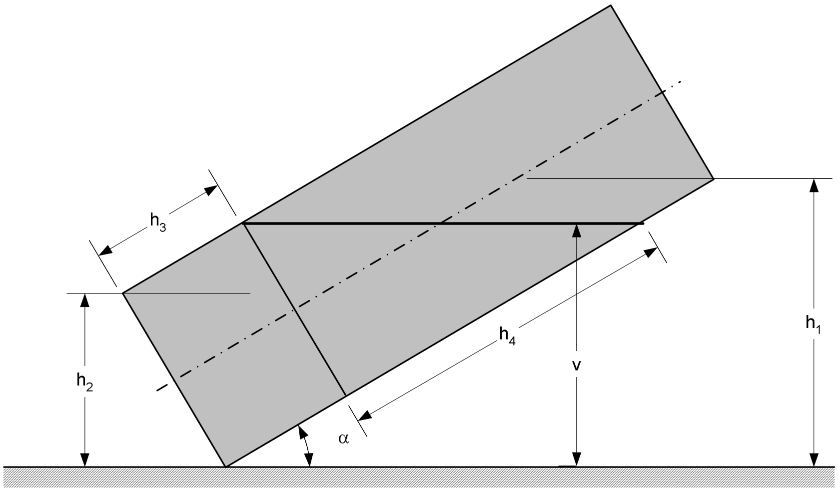
We kunnen dit volume zien als het variant van Geval 2.3: $V_{3.2}(a,b,h,\alpha,v)=V_{2.3}(a,b,h,\alpha,v)=\pi abh-V_{2.1}(a,b,h,\alpha,h_1+h_2-v)$

3.4 Geval 4



Figuur 11 Geval 4.1

We kunnen dit volume zien als een variant van Geval 2.1: $V_{4.1}(a,b,h,\alpha,v) = V_{2.1}(a,b,h,\alpha,v)$



Figuur 12 Geval 4.2

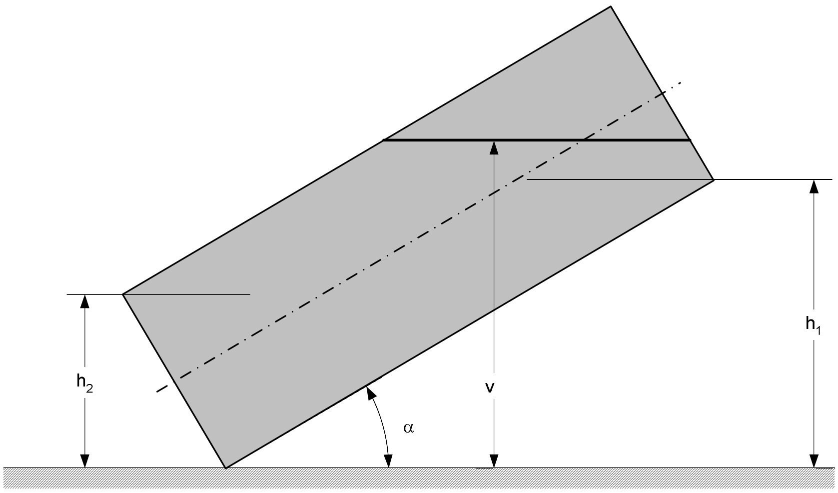
Dit geval kunnen we zien als een combinatie van Geval 5 en een limietsituatie van Geval 3.1.

$$\frac{2b}{h_4} = \tan(\alpha) \Rightarrow h_4 = 2b.\cot(\alpha)$$

$$\frac{v}{h_3 + h_4} = \sin(\alpha) \Rightarrow h_3 = \frac{v}{\sin(\alpha)} - 2b.\cot(\alpha)$$

En hieruit:

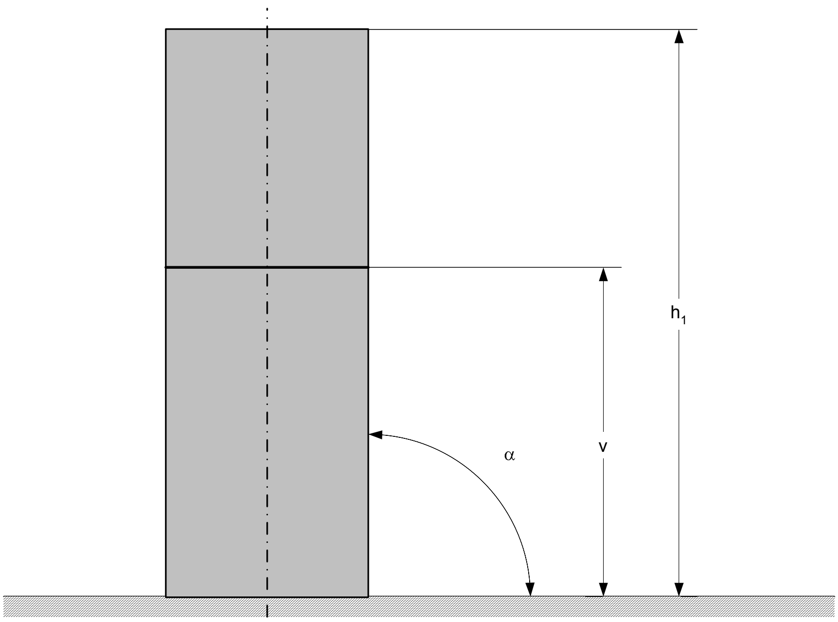
$$V_{4.2}(a,b,h,\alpha,v) = \pi abh_3 + \frac{1}{2}.\pi abh_4 = \pi ab.\left(h_3 + \frac{h_4}{2}\right) = \pi ab.\left(\frac{v}{\sin(\alpha)} - b.\cot(\alpha)\right)$$



Figuur 13 Geval 4.3

We kunnen dit volume zien als een variant van Geval 2.3: $V_{4.3}(a,b,h,\alpha,v) = V_{2.3}(a,b,h,\alpha,v) = \pi abh - V_{2.1}(h_1,h_2,h_1+h_2-v)$

3.5 Geval 5



Figuur 14 Geval 5

In dit klassieke geval hebben we: $V_5(a,b,h,\alpha,v) = \pi abv$

3.6 Samenvatting

Aan de hand van h_1, h_2 en v kunnen we dus verschillende gevallen karakteriseren:

Geval	**Voorwaarden h_1, h_2 en v**	**Volume**

1	$0 = h_1 \le v \le h_2 = 2b$	$V_1(a,b,h,\alpha,v)$
2.1	$0 \le v \le h_1 < h_2$	$V_{2.1}(a,b,h,\alpha,v)$
2.2	$0 < h_1 < v \le h_2$	$V_{2.2}(a,b,h,\alpha,v) =$ $V_{2.1}(a,b,h_5,\alpha,v) - V_{2.1}(a,b,h_5 - h,\alpha,v - h_1)$
2.3	$0 < h_1 < h_2 < v$	$V_{2.3}(h_1,h_2,v) =$ $\pi abh - V_{2.1}(h_1,h_2,h_1 + h_2 - v)$
3.1	$0 \le v \le h_1 = h_2$	$V_{3.1}(a,b,h,\alpha,v) = V_{2.1}(a,b,h,\alpha,v)$
3.2	$0 < h_1 = h_2 < v$	$V_{3.2}(a,b,h,\alpha,v) =$ $V_{2.3}(a,b,h,\alpha,v) =$ $\pi abh - V_{2.1}(a,b,h,\alpha,h_1 + h_2 - v)$
4.1	$0 \le v \le h_2 < h_1$	$V_{4.1}(a,b,h,\alpha,v) = V_{2.1}(a,b,h,\alpha,v)$
4.2	$0 < h_2 < v \le h_1$	$V_{4.2}(a,b,h,\alpha,v) =$ $\pi ab.\left(\frac{v}{\sin(\alpha)} - b.\cot(\alpha)\right)$
4.3	$0 < h_2 < h_1 < v$	$V_{4.3}(a,b,h,\alpha,v) =$ $V_{2.3}(a,b,h,\alpha,v) =$ $\pi abh - V_{2.1}(h_1,h_2,h_1 + h_2 - v)$
5	$0 = h_2 \le v \le h_1 = h$	$V_5(a,b,h,\alpha,v) = \pi abv$

We zien onmiddellijk volgende identiteiten (limietgevallen)

$$V_1(a,b,h,\alpha,2b) = V_5(a,b,h,\alpha,h) = \pi abh$$

$$V_{2.1}(a,b,h,\alpha,h_1) = V_{2.2}(a,b,h,\alpha,h_1)$$

$$V_{2.2}(a,b,h,\alpha,h_2) = V_{2.3}(a,b,h,\alpha,h_2)$$

$$V_{3.1}(a,b,h,\alpha,h_1) = V_{3.2}(a,b,h,\alpha,h_1) = \frac{1}{2}\pi abh$$

$$V_{4.1}(a,b,h,\alpha,h_2) = V_{4.2}(a,b,h,\alpha,h_2)$$

$$V_{4.2}(a,b,h,\alpha,h_1) = V_{4.3}(a,b,h,\alpha,h_1)$$

4 Praktische toepassingen

4.1 Bepalen van a, b, h en α

Om rekening te houden met een eventuele afronding op de zijwanden van de cilinder, kan de waarde voor h benaderd worden.

4.2 Verloop van v in functie van α voor een vast volume