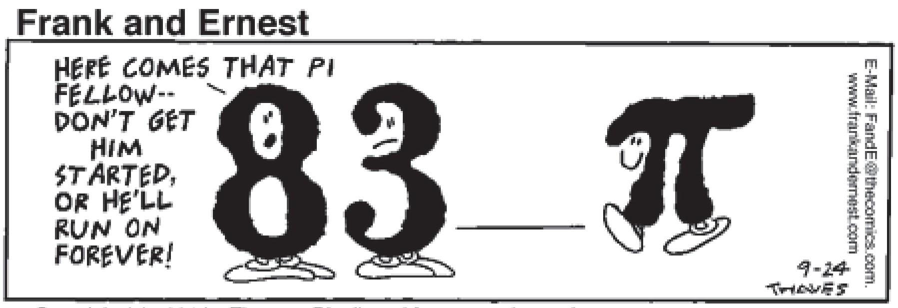
Hoofdstuk 1 – Eén, twee, drie, oneindig!

"An undefined problem has an infinite number of solutions."
Robert A. Humphrey



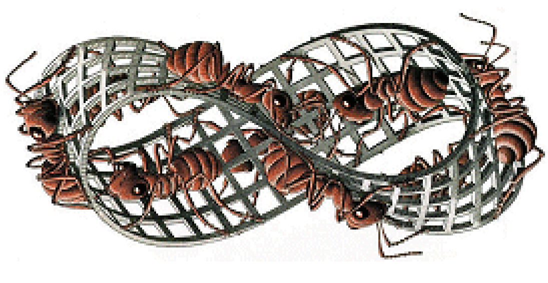
Wat is oneindig?

De verzameling van natuurlijke getallen bevat een oneindig aantal elementen. Ga maar na! Neem aan dat er 'een grootste natuurlijk getal n' zou bestaan... dan neem je gewoon n+1 en dan heb je een groter 'grootste getal'. De verzameling moet dan wel 'oneindig' zijn.

Maar wat is oneindig? Is het universum oneindig? Zo nee, is er dan een grens? En wat is er dan aan 'de andere kant' van die grens? Of is er niet aan de 'andere kant'?

Het is ook niet zo dat een oneindige verzameling alle mogelijke elementen moet bevatten. De verzameling van even getallen is zondermeer oneindig, terwijl er minstens evenveel oneven getallen zijn die helemaal niet in die verzameling voorkomen.

We zagen al eerder dat de som van alle getallen in een oneindige rij eindig kan zijn. Iets dat alleen maar groter wordt maar toch begrensd is? Kan dat? Oneindig wil dus ook niet zeggen oneindig groot.



All works by M.C. Escher (c) 2000 Cordon Art BV - Baarn - the Netherlands.

Het symbool voor oneindig is ∞, de 'omgevallen' 8. Je kunt spreken over +∞ en -∞, maar je kunt er niet mee rekenen. Oneindig is meer een 'proces' dan een 'toestand' zullen we maar zeggen en er zijn verschillende soorten 'oneindig'.

Het symbool voor oneindig ∞ wordt soms ook wel **de lemniscaat** genoemd. Maar of het daar iets mee te maken heeft?

> "Het symbool ∞ heeft waarschijnlijk weinig met de lemniscaat te maken. John Wallis voerde het symbool in 1655 in in zijn boek *Arithmetica Infinitorum*, ruim voor Bernoulli de vergelijking van de lemniscaat opstelde. Het verhaal gaat dat Wallis geïnspireerd werd door een van de Romeinse schrijfwijzen voor duizend: CIↃ. Als je dat maar snel genoeg opschrijft wordt dat vanzelf wel ∞."
> **De Lemniscaat - KP Hart**

Opdracht 1

- Maak van een strook papier de 'Band van Möbius' en knip hem midden door...

Aftelbaarheid

Neem eens aan dat je begint met 1 en dan verdubbelt en weer verdubbelt en weer... tot in het oneindige... Je krijgt dan de verzameling V={1, 2, 4, 8, 16, ... }. Dit is een oneindige verzameling, je kunt er mee doorgaan zolang je maar wilt...

V is 'slechts' een deelverzameling van $\mathbb{N}$. Je zou kunnen denken dat V dan wel 'kleiner' moet zijn dan $\mathbb{N}$. Dat is niet het geval...

V	1	2	4	8	16	...
$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	...

Als we de elementen van V een nummer geven van 0 tot n-1, dan kunnen we een 1-op-1-relatie vast leggen zodat elke element van V overeenkomt met een element van $\mathbb{N}$.

Opdracht 2

Neem V_n als het n-de getal in de rij V.

a. Geef een expliciet voorschrift voor V.
b. Bereken n zodat V_n>100.000.

Opdracht 3

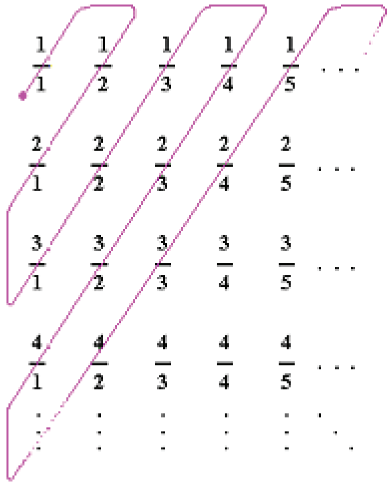
Je kunt hetzelfde doen als je $\mathbb{N}$ vergelijkt met $\mathbb{Z}$...

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	...
$\mathbb{Z}$	0	1	-1	2	-2	3	-3	...

a. Welk element van $\mathbb{Z}$ komt overeen met 1001 van $\mathbb{N}$?
b. Welk element van $\mathbb{N}$ komt overeen met -20.000 van $\mathbb{Z}$?

Opdracht 4

..of zelfs $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}$:



- Heb je op deze manier alle elementen van $\mathbb{Q}$ gehad? Zeker weten?

Aftelbaar

Oneindige verzamelingen waarbij je zo'n 1-op-1-relatie kan verzinnen met $\mathbb{N}$ noemen we **aftelbaar**. Je kunt elk element van zo'n verzameling laten corresponderen met een element uit de verzameling $\mathbb{N}$.

Opdracht 5
Aftelbaar of niet?

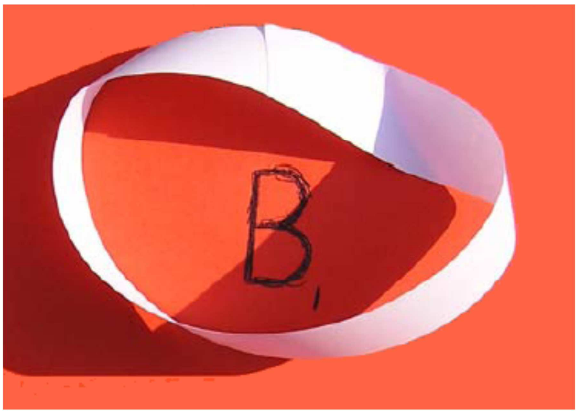
a. De verzameling van alle 4-vouden.
b. De verzameling van alle kwadraten.
c. De verzameling van alle priemgetallen.

Opdracht 6

Lees het artikel '**Oneindig'** van Robbert Dijkgraaf.
Het artikel staat in de werkruimte.

- Tijdens dat werkcollege wordt je geacht een aantal vragen over het artikel te kunnen beantwoorden.

Opdracht 1



Opdracht 2

a. $V_n = 2^{n-1}$

b. $n > 17$

Opdracht 3

a. 501

b. 40.000

Opdracht 4

Ja, ja…

Opdracht 5

Allemaal aftelbaar