

Hoofdstuk 6 – logaritmen

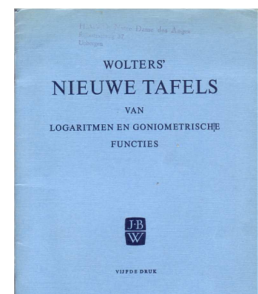
We zagen al eerder dat je bij het vermenigvuldigen van machten met gelijk grondtal de exponenten op mag tellen. Dat is bijzonder, want als je bij een willekeurige vermenigvuldiging de getallen zou kunnen schrijven als machten van bijvoorbeeld 2 dan zou je de exponenten kunnen optellen. Je zou dus kunnen 'vermenigvuldigen door op te tellen'.

Logaritmen zijn uitgevonden om makkelijker te kunnen vermenigvuldigen. Stel je maar eens voor: ik maak een lijstje met de machten van 2 (zie rechts). Het is niet zo moeilijk om dit lijstje verder uit te breiden.	$2^2=4$
Nu wil ik berekenen 16×8	$2^3=8$
Ik kijk in mijn lijstje en zie dat:	$2^4=16$
$16 = 2^4$ en $8 = 2^3$, dus: $16 \times 8 = 2^4 \times 2^3 = 2^7 = 128$	$2^5=32$
Dat is bijzonder! Ik kan dus nu vermenigvuldigen door op te tellen . Optellen is veel makkelijker dan vermenigvuldigen. Zou dat niet handig zijn?	$2^6=64$
	$2^7=128$
	$2^8=256$
	$2^9=512$
	$2^{10}=1024$
	$2^{11}=2048$
	Enz...

Opdracht 1

Bereken op dezelfde manier:

- $4 \times 32 =$
- $2048 : 64 =$
- $\sqrt{256} =$



Dat lijkt misschien handig maar niet alle getallen zijn op een eenvoudige manier te schrijven als machten van 2. Je zou dan voor 'alle getallen' lijsten moeten gaan maken... In tabellenboekjes (en je GR) kan je logaritmentafels vinden met **grondtal 10**. Deze getallen noemen **logaritmen**.

$${}^g \log(a) = b \Leftrightarrow a = g^b$$

Voor $a > 0$, $a \neq 1$ en $b > 0$

Opdracht 2

Bereken x:

- ${}^2 \log(x) = -2$
- ${}^x \log(256) = 4$
- ${}^5 \log\left(\frac{1}{125}\right) = x$

Logaritmen met grondtal 10

Hieronder zie je gedeelte van een logaritmetafel uit een tabellenboekje:

1000-1500											log x										
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	x										
100	0000	04	09	13	17	22	26	30	35	39	100										
101	0043	48	52	56	60	65	69	73	77	82	101										
102	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124	102										
103	0128	33	37	41	45	49	54	58	62	66	103										
104	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208	104										
105	0212	16	20	24	28	33	37	41	45	49	105										
106	0253	57	61	65	69	73	78	82	86	90	106										
107	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330	107										
108	0334	38	42	46	50	54	58	62	66	70	108										
109	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410	109										
110	0414	18	22	26	30	34	38	41	45	49	110										
111	0453	57	61	65	69	73	77	81	84	88	111										
112	0492	0496	0500	0504	0508	0512	0515	0519	0523	0527	112										
113	0531	35	38	42	46	50	54	58	61	65	113										
114	0569	0573	0577	0580	0584	0588	0592	0596	0599	0603	114										
115	0607	11	15	18	22	26	30	33	37	41	115										
116	0645	48	52	56	60	63	67	71	74	78	116										
117	0682	0686	0689	0693	0697	0700	0704	0708	0711	0715	117										
118	0719	22	26	30	34	37	41	45	48	52	118										
119	0755	59	63	66	70	74	77	81	85	88	119										
120	0792	0795	0799	0803	0806	0810	0813	0817	0821	0824	120										
121	0828	31	35	39	42	46	49	53	56	60	121										
122	0864	67	71	74	78	81	85	88	92	96	122										
123	0899	0903	0906	0910	0913	0917	0920	0924	0927	0931	123										
124	0934	38	41	45	48	52	55	59	62	66	124										
125	0969	0973	0976	0980	0983	0986	0990	0993	0997	1000	125										
126	1004	07	11	14	17	21	24	28	31	35	126										
127	1038	41	45	48	52	55	59	62	65	69	127										
128	1072	1075	1079	1082	1086	1089	1092	1096	1099	1103	128										
129	1106	09	13	16	19	23	26	29	33	36	129										
130	1139	43	46	49	53	56	59	63	66	69	130										
131	1173	1176	1179	1183	1186	1189	1193	1196	1199	1202	131										
132	1206	09	12	16	19	22	25	29	32	35	132										
133	1239	42	45	48	52	55	58	61	65	68	133										
134	1271	1274	1278	1281	1284	1287	1290	1294	1297	1300	134										
135	1303	07	10	13	16	19	23	26	29	32	135										
136	1335	39	42	45	48	51	55	58	61	64	136										
137	1367	70	74	77	80	83	86	89	92	96	137										
138	1399	1402	1405	1408	1411	1414	1418	1421	1424	1427	138										
139	1430	33	36	40	43	46	49	52	55	58	139										
140	1461	64	67	71	74	77	80	83	86	89	140										
141	1492	1495	1498	1501	1504	1508	1511	1514	1517	1520	141										
142	1523	26	29	32	35	38	41	44	47	50	142										
143	1553	56	59	62	65	69	72	75	78	81	143										
144	1584	1587	1590	1593	1596	1599	1602	1605	1608	1611	144										
145	1614	17	20	23	26	29	32	35	38	41	145										
146	1644	47	49	52	55	58	61	64	67	70	146										
147	1673	1676	1679	1682	1685	1688	1691	1694	1697	1700	147										
148	1703	06	08	11	14	17	20	23	26	29	148										
149	1732	35	38	41	44	46	49	52	55	58	149										
150	1761	64	67	70	72	75	78	81	84	87	150										
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	x										

Je ziet hier 'mantissen van logaritmen' van 1000-1500. Je schrijft log x (zonder grondtal) als je logaritmen met het grondtal 10 bedoelt. Op de pagina hierboven kan je dus de logaritmen vinden van de getallen 1000 t/m 1500 met 10 als grondtal.

Opdracht 3

- Bepaal met behulp van de logaritmetabel de waarde van $\log(1087)$.
- Bepaal met behulp van de tabel de waarde van $\log(10,23)$
- Voor welke waarde van n geldt $\log(n) \approx 3,0913$
- Bepaal de waarde van x als $\log(x) = 2,0913$

Je kunt met de tabel niet alleen logaritmen vinden van getallen tussen 1000 en 1500. Bekijk onderstaand lijstje:

- $\log(1150) \approx 3,0607$
- $\log(115) \approx 2,0607$
- $\log(11,5) \approx 1,0607$
- $\log(1,15) \approx 0,0607$

Je ziet dat het gedeelte achter de komma steeds hetzelfde is. Dat deel noemen we de **mantisse**. Het getal voor de komma bepaalt de 'grootte' van het getal... niet de cijfers...☺

Je kunt nu met de tabel bijvoorbeeld berekenen $11,5 \times 1,15$. Dat gaat zo:

Bepaal $\log(11,5)$ en $\log(1,15)$. Tel die op en zoek in de tabel de macht van 10.

- $\log(11,5) + \log(1,15) = 1,0607 + 0,0607 = 1,1214$
- $1,1214 \rightarrow 13,225$
- Conclusie: $11,5 \times 1,15 = 13,225$

Met de tabel kun je vermenigvuldigen door op te tellen.

Opdracht 4

Bereken met behulp van de logaritmetabel:

- $14 : 12$
- $\sqrt{147}$

$${}^g \log(a \cdot b) = {}^g \log(a) + {}^g \log(b)$$

Voor $a > 0$ en $b > 0$

Rekenregels voor logaritmen

Hiernaast zie je een aantal rekenregels voor logaritmen staan. L0 en L1 hebben hierboven al gezien.

Logaritmen

L0.

$${}^a \log(b) + {}^a \log(c) = {}^a \log(b \cdot c)$$

L1.

$${}^a \log b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

($a > 0$ en $a \neq 1$ en $b > 0$)

L2.

$${}^a \log b = \frac{\log b}{\log a}$$

(zie *)

L3.

$${}^a \log b^p = p \cdot {}^a \log b$$

L4.

$$a^{{}^a \log(b)} = b$$

*)

L2 (uitgebreid).

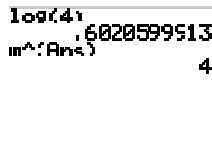
$${}^g \log b = \frac{{}^a \log b}{{}^a \log a}$$

($g > 0$)

Opdracht 5

- Probeer L2, L3 en L4 te **bewijzen**.

De rekenregel ${}^a\log(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)}$ is een regel die je vaak nodig zult hebben. Op je GR heb je de beschikking over een logaritme tafel. Als je **log(4)** intikt dan krijg je de logaritme van 4 bij het grondtal 10. De uitkomst is de exponent om 4 als een macht van 10 te schrijven. Dit kan je makkelijk controleren:



Klopt precies...:-)

Maar je kunt voor elk willekeurig grondtal logaritmen uitrekenen ($g > 0$ en $g \neq 1$), dus ook met het grondtal $g=3$ of $g=\frac{1}{2}$.

Opdracht 6

Bereken:

a. ${}^3\log(243)$

b. ${}^{\frac{1}{2}}\log(32)$

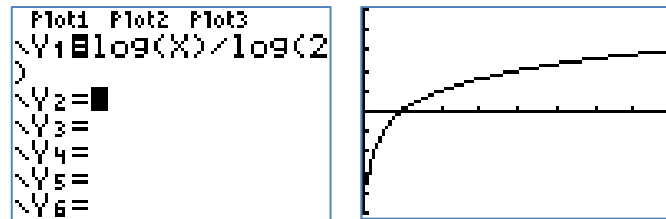
Nu zou je denken dat je met je GR ook in één keer ${}^3\log(123)$ of ${}^{\frac{1}{2}}\log(32)$ kunt berekenen. Maar helaas... op je GR heb je alleen **log()** en **ln()** maar verder niet. Om toch ook logaritmen te kunnen gebruiken met een ander grondtal (bij berekeningen maar ook bij het plotten) is de regel

$${}^a\log(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)} \text{ nodig.}$$

$${}^3\log(123) = \frac{\log(123)}{\log(3)} \rightarrow \boxed{\frac{\log(123)}{\log(3)}}_5 \quad \text{of} \quad {}^{\frac{1}{2}}\log(32) = \frac{\log(32)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} \rightarrow \boxed{\frac{\log(32)}{\log(.5)}}_5$$

LET OP: dezelfde regel gebruik voor het plotten van functies met logaritmen.

Om (bijvoorbeeld) de grafiek te plotten van $f(x) = {}^2\log(x)$ maak je ook gebruik van deze regel.



Opdracht 7

- Benader met je GR de coördinaten van de snijpunten van $f(x) = {}^2\log(x)$ en $g(x) = 2^x - 3$ op 1 decimaal nauwkeurig.

Opdracht 8

Bereken uit het hoofd (en controleer je antwoorden met je GR):

- ${}^2\log(8) + {}^4\log(16) =$
- ${}^{0,5}\log(32) \cdot {}^2\log(32) =$

Opdracht 9

Benader met je GR op 3 decimalen nauwkeurig:

- ${}^2\log(6)$
- ${}^3\log(6)$
- $\log(6)$

Opdracht 10

- Bepaal met je GR het snijpunt van $f(x) = {}^2\log(x)$ en $g(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(x)$.
- Geef het snijpunt met de x-as van $h(x) = {}^8\log(x)$.
- Heeft de grafiek van $h(x) = {}^8\log(x)$ asymptoten? (Leg uit)



The ark lands after The Flood. Noah lets all the animals out. Says, "Go and multiply." Several months pass. Noah decides to check up on the animals. All are doing fine except a pair of snakes. "What's the problem?" says Noah. "Cut down some trees and let us live there", say the snakes. Noah follows their advice. Several more weeks pass. Noah checks on the snakes again. Lots of little snakes, everybody is happy. Noah asks, "Want to tell me how the trees helped?" "Certainly", say the snakes. "We're adders, and we need logs to multiply."

Hoofdstuk 6 - Logaritmen

Opdracht 1

- a. $4 \times 32 = 2^2 \times 2^5 = 2^7 = 128$
- b. $2048 : 64 = 2^{11} : 2^6 = 2^5 = 32$
- c. $\sqrt{256} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16$

Opdracht 2

- a. ${}^2 \log(x) = -2 \Rightarrow x = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$
- b. ${}^x \log(256) = 4 \Rightarrow x^4 = 256 \Rightarrow x = \sqrt[4]{256} = 4$
- c. ${}^5 \log\left(\frac{1}{125}\right) = x \Rightarrow 5^x = \frac{1}{125} \Rightarrow 5^x = \frac{1}{5^3} \Rightarrow 5^x = 5^{-3} \Rightarrow x = -3$

Opdracht 3

- a. $\log(1087) \approx 3,0362$
- b. $\log(10,23) \approx 1,0099$
- c. $\log(n) \approx 3,0913 \rightarrow 1234$
- d. $\log(x) = 2,0913 \rightarrow 123,4$

Opdracht 4

- a. $14 : 12$
 $1,1461 - 1,0792 = 0,0669$
 $0,0669 \rightarrow 1,1665$
- b. $\sqrt{147}$
 $147 \rightarrow 2,1673 \rightarrow \text{delen door 2 geeft } 1,0837$
 $1,0837 \rightarrow 12,125$

Opdracht 5

L2.

Te bewijzen: ${}^a \log b = \frac{\log b}{\log a}$

$$a^{a \log(b)} = b$$

$$\log\left(a^{a \log(b)}\right) = \log(b)$$

$${}^a \log(b) \cdot \log(a) = \log(b)$$

$${}^a \log(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)}$$

L3.

Te bewijzen: ${}^a \log(b^p) = p \cdot {}^a \log(b)$

L4.

Te bewijzen: $a^{a \log(b)} = b$

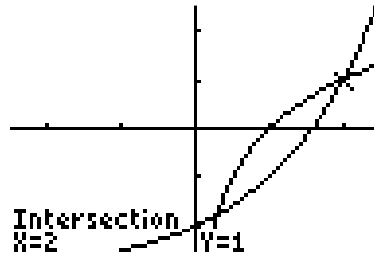
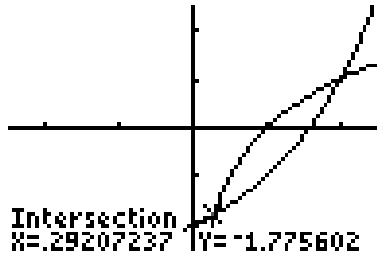
Gebruik L1: ${}^a \log(b) = c \Leftrightarrow a^c = b$

$${}^a \log(b) = {}^a \log(b)$$

Opdracht 6

- a. ${}^3 \log(243) = {}^3 \log(3^5) = 5$
- b. $\frac{1}{2} \log(32) = \frac{1}{2} \log(2^5) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{2^{-5}}\right) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = -5$

Opdracht 7



Opdracht 8

a. ${}^2\log(8) + {}^4\log(16) = 3 + 2 = 5$

b. ${}^{0,5}\log(32) \cdot {}^2\log(32) = -5 \cdot 5 = -25$

$$\frac{\log(8)/\log(2) + \log(16)/\log(4)}{5}$$

$$\frac{\log(32)/\log(.5) * \log(32)/\log(2)}{-25}$$

Opdracht 9

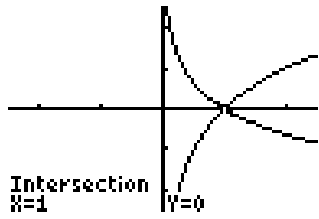
a. ${}^2\log(6) \approx 2,585$

b. ${}^3\log(6) \approx 1,631$

c. $\log(6) \approx 0,778$

Opdracht 10

a.



b.

$${}^8\log(x) = 0$$

$$x = 1$$

$$(1, 0)$$

c.

Ja.

$$\lim_{x \downarrow 0} {}^8\log(x) = -\infty$$