



Wat heeft het wereldrecord dominostenen omgooien met wiskunde te maken? Het antwoord op deze vraag luidt: 'het domino-principe'. Dit is een krachtige techniek waarmee je allerlei wiskundige uitspraken kunt bewijzen.

# Het domino-principe

André de Boer

Het wereldrecord dominostenen omtuimelen staat op 1,4 miljoen stenen. Het werd gevestigd op 28 augustus 1998 in Leeuwarden. Je hebt het misschien wel gezien op tv: een grote hal met een vloer-oppervlak van 4000 m<sup>2</sup> waarin een lint van 78 km dominostenen was uitgezet. In totaal waren er 2,3 miljoen stenen geplaatst. Op een gegeven moment kreeg de eerste steen een duwtje, deze viel om en gaf de tweede steen een duwtje, zodat deze omviel en waardoor ook de derde steen omviel ... enzovoort. Uiteindelijk vielen er 1,4 miljoen stenen om; net voldoende om het wereldrecord te vestigen en opgenomen te worden in het Guinness Book of Records.

## Bewijzen

Stel je wilt bewijzen dat de som van de eerste  $n$  getallen gelijk is aan  $\frac{1}{2}n(n+1)$ . Met andere woorden, je wilt bewijzen dat:

$$\begin{aligned}1 &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = 1 \\1 + 2 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2+1) = 3 \\1 + 2 + 3 &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (3+1) = 6\end{aligned}$$

en ga zo maar door. In een formule:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1).$$

Je kunt controleren dat de formule klopt voor 1, 2 en 3.

Stel nu eens dat je wilt bewijzen dat deze formule klopt voor *alle* natuurlijke getallen 1, 2, 3, 4, ... Als je de formule eerst controleert voor 1, daarna voor 2, dan voor 3, dan voor 4, voor 5, voor 6, dan begrijp je dat het bewijs nooit afkomt. Ga maar na: stel dat je vanaf je achttiende tot je achtenzeventigste levensjaar elke dag acht uur aan dit bewijs werkt. Als je 1 minuut nodig hebt om de formule voor één getal te controleren, dan zal je bij je overlijden niet verder zijn dan het getal:

$$60 \times 365\frac{1}{4} \times 8 \times 60 = 10.519.200.$$

In deze berekening staat  $365\frac{1}{4}$  omdat eens in de vier jaar een jaar 366 dagen telt. Je ziet dat je dan nog lang niet klaar bent. Zelfs de snelste computer zal het bewijs nooit af krijgen, eenvoudig omdat er te veel getallen zijn.

## Volledige inductie

Er bestaat een techniek die het mogelijk maakt de formule in één klap voor alle getallen tegelijk te bewijzen. Deze techniek wordt *natuurlijke* of *volledige inductie* genoemd en doet met getallen hetzelfde als met de dominostenen gebeurde.

Voor deze methode hoef je de formule maar voor één geval te controleren, namelijk voor  $n = 1$ . Verder moet je het *domino-effect* aantonen. Dit houdt in dat je van een bewijs van de formule voor een bepaald getal een bewijs kunt maken voor het volgende getal.

Het bewijs van de formule voor een bepaald getal kun je je voorstellen als een omgevallen dominosteen. Het domino-effect garandeert dat als de formule voor een bepaald getal 'omgevallen is', de formule ook 'omvalt' voor het volgende getal.

Als je  $n = 1$  gecontroleerd hebt, heb je de eerste steen omgegooid. Met het domino-effect volgt dan ook de tweede steen, de derde steen, enzovoort. Het domino-effect zorgt er voor dat als de formule 'omgevallen is' voor het lint van alle getallen tot en met de  $n$ -de steen, de formule ook omvalt voor de  $(n + 1)$ -ste steen. Zodoende weet je dan zeker dat de formule 'omvalt' voor *alle* getallen.

## Een voorbeeld

Met volledige inductie gaan we de volgende formule voor  $1+2+3+\dots+n$  bewijzen:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Daarvoor moeten we twee dingen doen:

1. de formule bewijzen voor  $n=1$ ;
2. het domino-effect aantonen.

## Gauss

Het dominoprincipe is niet de enige wiskundige bewijstechniek. Zo gaat het verhaal dat de jonge Gauss op school als strafwerk een keer de eerste 100 getallen bij elkaar op moest tellen. Binnen enkele seconden had hij al de uitkomst bepaald. Hoe deed hij dat? Hij telde het eerste getal uit  $1 + 2 + 3 + \dots + 100$  bij het laatste getal op, het tweede getal bij het één na laatste getal en zo verder:

$$1 + 100 = 101$$

$$2 + 99 = 101$$

$$3 + 98 = 101$$

...

$$50 + 51 = 101$$

Er staat nu 50 keer de uitkomst 101, dus het antwoord luidt:

$$50 \times 101 = 5050.$$

Deze methode bewijst voor  $n = 100$  zonder volledige inductie de formule  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ , immers:  $50 = \frac{1}{2} \times n$  en  $101 = n + 1$ .

## Het bewijs

1. Voor  $n=1$  is de formule eenvoudig:

$$1 = \frac{1}{2} \cdot (1+1)$$

De eerste steen is omgekukeld.

2. In de volgende stap van het bewijs moeten we aantonen dat als de formule waar is voor het getal  $n$ , de formule ook waar is voor het volgende getal  $n+1$ . Stel dus dat de formule klopt voor het getal  $n$ . Men noemt deze aanname de *inductieveronderstelling*:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Let op: de formule geldt hier voor slechts één bepaalde  $n$  (en niet voor *alle*  $n$ ). Nu volgt:

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) \\ &= (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n+1) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) \\ &= (n+1)\left(\frac{1}{2}n+1\right) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)((n+1)+1). \end{aligned}$$

Hier staat de formule die we wilden bewijzen, alleen staat nu op de plaats van de  $n$  het getal  $n+1$ . Met andere woorden: als de formule opgaat voor  $n$ , dan gaat hij ook op voor  $n+1$ .

Omdat we de formule waar is voor  $n=1$ , is hij nu ook waar voor  $n=2$ . En omdat hij waar is voor  $n=2$ , is hij ook waar voor  $n=3$ . En daarom ook voor  $n=4$ , enzovoort. Met behulp van het domino-principe volgt dus dat de formule waar is voor alle getallen  $1, 2, 3, 4, \dots$



## OPGAVEN.

1. Laat met volledige inductie zien dat voor alle  $n = 1, 2, 3, \dots$  de volgende formule waar is:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

2. Bewijs voor alle  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$3^{2n+1} + 2^{n-1} \text{ is deelbaar door } 7.$$

De bewijzen kun je vinden op de homepage van Pythagoras. Heb je geen Internet, stuur dan een briefje naar de redactie, dan krijg je de oplossing thuisgestuurd. 