Het lootjestrekken.

Noem A_n het aantal elementen van de gebeurtenis: n personen trekken lootjes, en niemand trekt zichzelf. Neem $n \geq 2$.
Als één persoon een lootje getrokken heeft, en niet zichzelf, blijven er $n-1$ lootjes over, met 1 lootje waarvan de persoon niet meer meedoet (noem dit lootje de dummy) en $n-1$ personen waarbij van 1 persoon het lootje er niet meer inzit (noem deze persoon de getrokkene).
Noem B_{n-1} het aantal elementen van de gebeurtenis: uit deze restpot trekt niemand zichzelf.
Dan geldt dus: $A_n = (n-1)B_{n-1}$ (1)
Onderscheid nu twee gevallen:

a. de getrokkene trekt de dummy
b. de getrokkene trekt niet de dummy

In geval a. blijven er $n-2$ personen met $n-2$ lootjes zonder dummy en zonder getrokkene over, dus het aantal elementen van deze gebeurtenis waarbij niemand zichzelf trekt is gelijk aan A_{n-2}.
In geval b. zijn er voor de getrokkene $n-2$ mogelijkheden (hij mag niet de dummy trekken, en niet zichzelf). Er blijven $n-2$ lootjes over met dummy en $n-2$ personen waarvan een nieuwe getrokkene, dus het aantal elementen van deze gebeurtenis waarbij niemand zichzelf trekt is gelijk aan $(n-2)B_{n-2}$.
Er geldt dus: $B_{n-1} = A_{n-2} + (n-2)B_{n-2}$
ofwel: $B_n = A_{n-1} + (n-1)B_{n-1}$
Combinatie van deze formule met de formule (1) levert: $B_n = A_{n-1} + A_n$, en tenslotte:
$A_n = (n-1)(A_{n-2} + A_{n-1})$
Hiermee hebben we een recursieve betrekking voor A_n.

Hiervan gaan we met volledige inductie bewijzen dat dit leidt tot de formule $A_n = n!\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$.

Voor $n=2$ en $n=3$ is de formule juist.
Stel de juistheid voor alle waarden $\leq n$.

$$A_{n+1} = n(A_{n-1} + A_n) = n\left((n-1)!\sum_{i=2}^{n-1}\frac{(-1)^i}{i!} + n!\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}\right) = n(n-1)!\left(\sum_{i=2}^{n-1}\frac{(-1)^i}{i!} + n\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}\right)$$

$$= n!\left(\sum_{i=2}^{n+1}\frac{(-1)^i}{i!} - \frac{(-1)^n}{n!} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + n\sum_{i=2}^{n+1}\frac{(-1)^i}{i!} - n\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

$$= n!\left((n+1)\sum_{i=2}^{n+1}\frac{(-1)^i}{i!} - \frac{(-1)^n}{n!} - (n+1)\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

$$= n!\left((n+1)\sum_{i=2}^{n+1}\frac{(-1)^i}{i!} - \frac{(-1)^n}{n!} - \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\right) = (n+1)!\left(\sum_{i=2}^{n+1}\frac{(-1)^i}{i!}\right)$$

waarmee de inductiestap bewezen is.

Hieruit volgt dat de kans dat het lootjestrekken in één keer goed gaat gelijk is aan $\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$.

Dit getal nadert al heel snel naar $\frac{1}{e}$