1 Inleiding

Bron: *Merkwaardige en interessante puzzels* (oorspronkelijke titel: The Penguin Book of Curious and Interesting Puzzels) – 1995, David Wells, Uitgeverij Ooievaar Amsterdam, ISBN 90 5713 3121- Problemen 130 en 131.

130. Een briefschrijver schrijft tien brieven en adresseert tien envloppen. Op hoeveel manieren kunnen de brieven in de verkeerde enveloppen worden gestopt?

131. Als men zeven brieven op goed geluk in zeven enveloppen stopt, hoeveel brieven zou men dan gemiddeld in de juiste enveloppe verwachten terug te vinden?

Johan Deryckere – 09.10.2002

2 Probleem 130

Het probleem is algeeen als volgt te formuleren:

Gegeven $V_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$, hoeveel permutaties $P(V_n) = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ bestaan er zodat voor elke $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ geldt: $a_i \neq i$?

Met B_n noteren we het aantal permutaties $P(V_n) = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ waarvoor er precies *n* indexen *i* bestaan waarvoor $a_i \neq i$. Gevraagd is om B_n te bepalen.

Voor V_n zijn er in totaal $n!$ mogelijke permutaties. We kunnen de verzameling van permuaties in equivalentieklassen indelen op basis van het aantal indexen *i* met $a_i \neq i$. We noemen de klasse waarbij er precies *k* elementen verkeerd staan K_k. Er zijn $\binom{n}{n-k}$ manieren om de indexen *i* met $a_i = i$ te kiezen en B_k manieren om de indexen *i* met $a_i \neq i$ te kiezen. Het aantal permutaties in K_k is dus $\binom{n}{n-k}.B_k$.

Het aantal indexen *i* met $a_i \neq i$ van een permutatie van V_n is een geheel getal tussen 0 en n. We hebben dus:

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}.B_k \quad (1)$$

Hiermee kunnen we de triviale waarde voor B_0 bepalen:

$$0! - \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0-k}.B_k = B_0 \text{ dus: } B_0 = 1$$

Voor $n \geq 1$ kunnen we eigenschap (1) herschrijven tot:

$$B_n = n! - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{n-k}.B_k \quad (2)$$

Uit deze recursieve formule kunnen we één na één de waarden voor B_n bereken:

$$B_1 = 1! - \sum_{k=0}^{0} \binom{1}{1-k}.B_k = 1 - B_0 \text{ dus: } B_1 = 0$$

$$B_2 = 2! - \sum_{k=0}^{1} \binom{2}{2-k}.B_k = 2 - B_0 - 2.B_1 \text{ dus: } B_2 = 1$$

$$B_3 = 3! - \sum_{k=0}^{2} \binom{3}{3-k}.B_k = 6 - B_0 - 3.B_1 - 3.B_2 \text{ dus: } B_3 = 2$$

$$B_4 = 4! - \sum_{k=0}^{3} \binom{4}{4-k}.B_k = 24 - B_0 - 4.B_1 - 6.B_2 - 4.B_3 \text{ dus: } B_4 = 9$$

$$B_5 = 5! - \sum_{k=0}^{4} \binom{5}{5-k} .B_k = 120 - B_0 - 5.B_1 - 10.B_2 - 10.B_3 - 5.B_4 \text{ dus: } B_5 = 44$$

De vraag is of er een gesloten uitdrukking voor B_n bestaat.

We hebben: $B_n = n! - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{n-k} .B_k$ en $B_{n-1} = (n-1)! - \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{n-1-k} .B_k$. We proberen de faculteiten te elimineren door gepast te combineren:

$$B_n - n.B_{n-1} =$$

$$n! - n.(n-1)! - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{n-k} .B_k + n.\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{n-1-k} .B_k =$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{n-k} .B_k + n.\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{n-k} .B_{k-1} =$$

$$-B_0 - \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{n!}{(n-k)!.k!} .B_k - n.\frac{(n-1)!}{(n-k)!.(k-1)!} .B_{k-1} \right] =$$

$$-B_0 - \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{n!.B_k}{(n-k)!.k!} - \frac{k.n!.B_{k-1}}{(n-k)!.k.(k-1)!} \right] =$$

$$-B_0 - \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{n!.B_k}{(n-k)!.k!} - \frac{k.n!.B_{k-1}}{(n-k)!.k.(k-1)!} \right] =$$

$$-B_0 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!.k!} .(B_k - k.B_{k-1}) =$$

$$-B_0 - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{n-k} .(B_k - k.B_{k-1})$$

We bekijken de opeenvolgende waarden voor $B_n - n.B_{n-1}$:

$$B_1 - 1.B_0 = -1$$
$$B_2 - 2.B_1 = 1$$
$$B_3 - 3.B_2 = -1$$
$$B_4 - 4.B_3 = 1$$
$$B_5 - 15B_4 = -1$$

We vermoeden dus dat: $B_n - n.B_{n-1} = (-1)^n$ en bewijzen dit door inductie.

De eigenschap $B_n - n.B_{n-1} = (-1)^n$ geldt voor $n = 0$. We bewijzen dat als $B_k - k.B_{k-1} = (-1)^k$ voor alle $k < n$ dat dan ook $B_n - n.B_{n-1} = (-1)^n$.

Het Binomium van Newton leert dat $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} .x^k$ en in het bijzonder voor $x = -1$ dat $0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} .(-1)^k$ en dus:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{n-k}.(-1)^k = -\binom{n}{n}.(-1)^0 - \binom{n}{0}.(-1)^n = -1-(-1)^n$$

We weten dat $B_n - n.B_{n-1} = -B_0 - \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{n-k}.(B_k - k.B_{k-1})$ en met $B_0 = 1$ en $B_k - k.B_{k-1} = (-1)^k$ voor alle $k < n$ wordt dit:

$$B_n - n.B_{n-1} = -1 - \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{n-k}.(-1)^k = -1+1+(-1)^n = (-1)^n. \text{ (QED)}$$

We hebben dus dat $B_n - n.B_{n-1} = (-1)^n$ (3) of nog: $\frac{B_n}{n!} - \frac{B_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$. Zodat:

$$\frac{B_1}{1!} - \frac{B_0}{0!} = \frac{(-1)^1}{1!}$$

$$\frac{B_2}{2!} - \frac{B_1}{1!} = \frac{(-1)^2}{2!}$$

$$\frac{B_3}{3!} - \frac{B_2}{2!} = \frac{(-1)^3}{3!}$$

$$\frac{B_4}{4!} - \frac{B_3}{3!} = \frac{(-1)^4}{4!}$$

...

$$\frac{B_{n-1}}{(n-1)!} - \frac{B_{n-2}}{(n-2)!} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\frac{B_n}{n!} - \frac{B_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Optellen en schrappen levert:

$$\frac{B_n}{n!} - \frac{B_0}{0!} = \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} \text{ en dus:}$$

$$\frac{B_n}{n!} = \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} \text{ zodat:}$$

$$B_n = n!.\left[\frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}\right] = n!.\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \text{ (4).}$$

We zien ook dat: $\frac{B_n}{n!} = \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$, zodat $\lim_{n\to\infty}\frac{B_n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$.

We kunnen voor grote waarden van n dus goed benaderen: $B_n = \frac{n!}{e}$ (5).

3 Probleem 131

Met de notatie van het vorige stukje is de vraag in het algemeen: wat is de verwachte waarde voor het aantal indexen i waarvoor $a_i = i$.

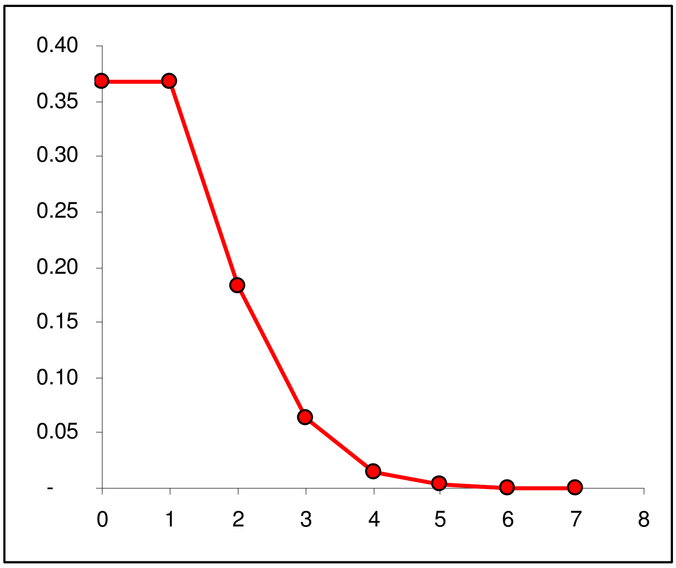
De kans op k juiste enveloppes is dan: $p_k^{(n)} = \dfrac{\binom{n}{k}.B_{n-k}}{n!} = \dfrac{B_{n-k}}{(n-k)!.k!}$.

Dat $\sum_{k=0}^{n} p_k^{(n)} = 1$ volgt onmiddellijk uit eigenschap (1).

Voor $n = 7$ zijn dit de waarden: $p_k^{(n)}$

k	$p_k^{(n)}$
0	0.367857
1	0.368056
2	0.183333
3	0.062500
4	0.013889
5	0.004167
6	0.000000
7	0.000198

En grafisch:



De verwachting is dus: $E_n = \sum_{k=0}^{n} k.p_k^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{k.B_{n-k}}{(n-k)!.k!}$.

Voor $n = 7$ vinden we: $E_7 = 1$.

Dit is een opmerkelijke waarde. We onderzoeken dit verder.

$$E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k.B_{n-k}}{(n-k)!.k!} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{(n-k)!.k!}.(n-k)!.\sum_{i=2}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}\right] =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(k-1)!}.\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}\right] = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!.(k-1)!}$$

Als we de waarden van E_n uitzetten in een tabel van mogelijke i- en k-waarden, dan zien we dat elke 'schuine lijn' een som 0 heeft. Dit zijn precies de waarden die het verschil maken tussen E_n en E_{n+1}.

Nu hebben we:

$$E_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!.(k-1)!} = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{n-1-k}\frac{(-1)^i}{i!.(k-1)!} + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!.(k-1)!}\right] + \sum_{k=n}^{n}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!.(k-1)!} =$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1-k}\frac{(-1)^i}{i!.(k-1)!} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!.(k-1)!} + \sum_{i=0}^{0}\frac{(-1)^i}{i!.(n-1)!} =$$

$$E_{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^{n-k-1}}{(n-k-1)!.k!} = E_{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-2}\left[\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!.k!}.(-1)^k\right] =$$

$$E_{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}.(-1)^k$$

Uit het Binomium van Newton: $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}.(-1)^k = 0$ dus: $\binom{n-1}{n-1}.(-1)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}.(-1)^k = 0$ en: $\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}.(-1)^k = (-1)^n$.

Dus: $E_n = E_{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}.(-1)^n = E_{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n-1)!} = E_{n-1}$. We rekenen makkelijk na dat $E_1 = 1.\frac{B_0}{0!.1!} = 1$ zodat: $E_n = 1$ voor elke *n*. (QED)